PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY

JAN 8

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 161

Heft 3

Ausgegeben den 9. Dezember 1929

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 161. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Fock, V., Über die konforme Abbildung eines Kreisvierecks mit verschwindenden Winkeln auf eine Halbebene 137

Gruder, O., Über symmetrische Grundfunktionen natürlicher Zahlen 152

Tschebotaröw, N., Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers 179

Kamke, E., Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 194

Schlesinger, Ludwig, Über den Logarithmus einer Matrix 199

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Über die konforme Abbildung eines Kreisvierecks mit verschwindenden Winkeln auf eine Halbebene[1]).

Von *V. Fock* in Leningrad.

Diese Arbeit entstand im Laufe der Untersuchung eines elektrotechnischen Problems, nämlich der Bestimmung der Temperaturverteilung in einem mehraderigen Kabel[2]). Der Querschnitt des Kabels ist in der Fig. A angegeben. Zur Lösung des Problems der Wärmeleitung mußte man den in der Figur schraffierten zweifach zusammenhängenden Bereich auf einen Kreisring konform abbilden. Diese Aufgabe läßt sich leicht auf die konforme Abbildung des in der Fig. B schraffierten Kreisvierecks auf ein Rechteck oder auf eine Halbebene zurückführen.

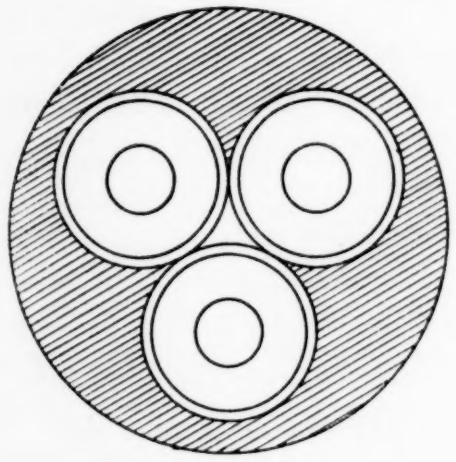

Fig. A.

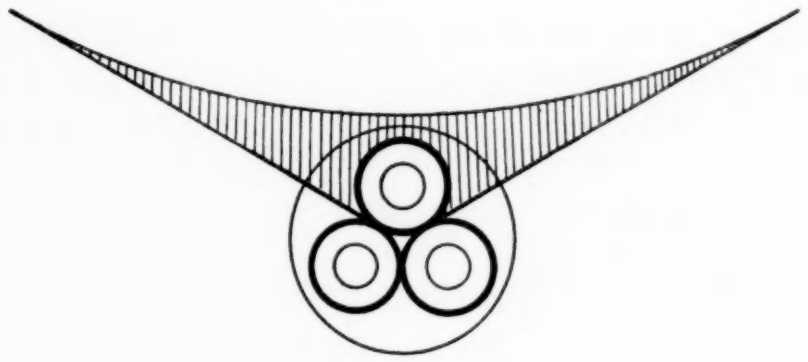

Fig. B.

Im folgenden werden wir uns mit der konformen Abbildung eines allgemeinen Kreisvierecks mit verschwindenden Winkeln befassen. Diese Abbildung wird bekanntlich durch den Quotienten beider Integrale der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d}{dx_1}\left[(x_1-a)\,(x_1-b)\,(x_1-c)\,\frac{dy_1}{dx_1}\right]+(x_1+\lambda)\,y_1=0$$

geleistet. Das Problem reduziert sich somit auf die Bestimmung der Konstanten a, b, c, λ nach den das Kreisviereck charakterisierenden Parametern. Die Differentialgleichung (1) wurde bereits von mehreren Autoren untersucht[3]). Es wurde bewiesen, daß für jedes Kreisviereck entsprechende Werte der Konstanten existieren. Das Problem der Bestimmung der Konstanten und der Integrale der Differentialgleichung (1)

[1]) Vorgetragen in der Phys.-Mathem. Gesellschaft in Leningrad am 23. Januar 1926. Journal de la Société Phys.-Math. de Leningrad t. 1 fasc. 2, p. 147, 1927.

[2]) „Über die Wärmeleitung in mehrphasigen Kabeln". Archiv für Elektrotechnik Bd. XVI H. 5, S. 331, 1926.

[3]) Siehe zum Beispiel, *D. Hilbert*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, p. 258. Teubner, Leipzig-Berlin 1912. *W. Smirnow*, Das Problem der Umkehrung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier singulären Punkten. Petrograd 1918 (russisch).

kann aber nicht als vollständig gelöst angesehen werden, denn es wurden keine für die numerische Berechnung brauchbaren analytischen Ausdrücke für diese Größen angegeben. In der vorliegenden Arbeit wird die Lösung dieses Problems gegeben.

§ 1. Wir ziehen zwei Kreise K_1 und K_2 so, daß die Seite DC des Vierecks das Spiegelbild von AB am Kreise K_1, und die Seite AD dasjenige von BC am Kreise K_2 wird. (Fig 1.) Das Viereck $ABCD$ zerfällt somit in vier Viertel, deren jedes ein Kreisviereck mit drei rechten Winkeln und einem Nullwinkel darstellt.

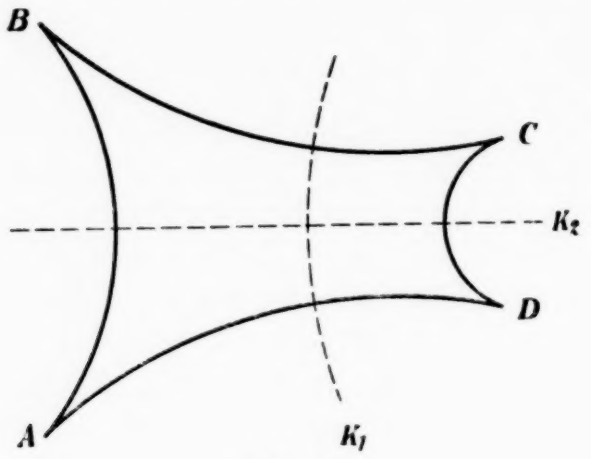

Fig. 1.

Um die Abbildung eines solchen Viertels auf die Halbebene zu finden, bilden wir den *Schwarz*schen Operator

$$\{s, x\} = \frac{d^2}{dx^2} \lg \frac{ds}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} \lg \frac{ds}{dx}\right)^2$$

und erhalten

$$(2) \quad \{s, x\} = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{(x-e_1)^2} + \frac{1}{(x-e_2)^2} + \frac{1}{(x-e_3)^2}\right] - \frac{5x+C}{8(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)},$$

wo e_1, e_2, e_3, C reelle Konstanten sind, wobei man $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ annehmen darf.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, zunächst die Abbildung unseres Vierecks auf ein Rechteck zu betrachten, derart, daß die Winkel des Vierecks in diejenigen des Rechtecks übergehen.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$(3) \qquad x = \wp(w); \quad w = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

und nehmen an, daß die reelle und die imaginäre Periode der Funktion $\wp(w)$ gleich $2K$ bzw. $2iK'$ sind. Die Gleichung (2) wird dann

$$(4) \qquad \{s, w\} = \frac{1}{2}\wp(w) - 2C.$$

Das Rechteck der w-Ebene stellt ein Viertel des Periodenparallelogramms der Funktion $\wp(w)$ dar. Es ist leicht einzusehen, daß das ursprüngliche Kreisviereck $ABCD$ auf das ganze Periodenparallelogramm abgebildet wird.

Die Funktion $s(w)$ läßt sich als Quotient der Integrale der Differentialgleichung

$$(5) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw^2} = -\frac{1}{4}\wp(w) + C$$

darstellen, welche ein Spezialfall der *Lamé*schen Gleichung

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw^2} = n(n+1)\wp(w) + C$$

mit $n = -\frac{1}{2}$ ist.

Wir wollen hier zwei Transformationen der Gleichung (5) erwähnen. Setzen wir

$$\wp\left(\frac{1}{2}w\right) = x_1; \quad y\sqrt{\wp'\left(\frac{1}{2}w\right)} = y_1\,, \tag{6}$$

so erhalten wir aus (5) die Form (1); und die Transformation

$$\frac{y}{\sqrt{H(w)}} = Y, \tag{7}$$

wo $H(w) = \vartheta_{11}\left(\frac{w}{2K}\right)$ die *Jacobi*sche Thetafunktion ist, liefert die Gleichung

$$H(w)\frac{d^2Y}{dw^2} + H'(w)\frac{dY}{dw} + \left[\frac{1}{4}H''(w) - c_1 H(w)\right]Y = 0\,, \tag{8}$$

wo

$$c_1 = C + \frac{1+\varkappa^2}{12} - \frac{K-E}{4K} \tag{9}$$

gesetzt ist.

Im folgenden werden wir unsere Gleichung in der Form (5) benutzen, obwohl die Form (8) in einigen Hinsichten Vorteile bietet.

§ 2. Die Gleichung (5) enthält zwei Konstanten, nämlich das Periodenverhältnis der Funktion $\wp(w)$ und die Konstante C. Andererseits wird bekanntlich das Kreisviereck $ABCD$ durch zwei Parameter charakterisiert; unsere Aufgabe besteht in der Bestimmung der beiden Konstanten der Differentialgleichung nach den Parametern des Kreisvierecks. Als Parameter wollen wir die Größen wählen, welche die gegenseitige Lage der gegenüberliegenden Seiten des Kreisvierecks charakterisieren.

Falls die Fortsetzungen der gegenüberliegenden Seiten sich unter einem Winkel γ schneiden, führen wir als Parameter die Größe

$$h = \frac{\gamma}{2\pi} \tag{10}$$

ein.

Falls sich die Seiten nicht schneiden, können sie durch eine lineare Transformation in konzentrische Kreise von Radien r_1 und r_2 übergeführt werden. In diesem Falle wählen wir als Parameter die Größe

$$p = \frac{1}{2\pi}\lg\frac{r_2}{r_1}\,. \tag{10*}$$

Falls sich also beide Paare gegenüberliegender Seiten nicht schneiden, wird das Kreisviereck durch die Parameter p und p' charakterisiert; wenn sich dagegen das eine Paar schneidet, so haben wir statt dessen die Parameter h und p'.

Die von uns gewählten Parameter sind gegenüber linearen Transformationen der Ebene des Kreisvierecks invariant.

§ 3. Wir gehen jetzt zu den Betrachtungen über, welche den Zusammenhang zwischen den Konstanten der Gleichung und den Parametern h und p' aufzustellen erlauben.

Nehmen wir an, daß zwei gegenüberliegende Seiten sich schneiden, und betrachten wir zunächst diese beiden Seiten. Durch eine lineare Substitution kann man die beiden

Schnittpunkte nach 0 und ∞ verlegen. Unser Viereck erhält dann die in der Fig. 2 angegebene Gestalt. Die Punkte $O, K, K + iK', iK'$ der Fig. 2 entsprechen den gleichnamigen Punkten der Fig. 3, welche die w-Ebene darstellt.

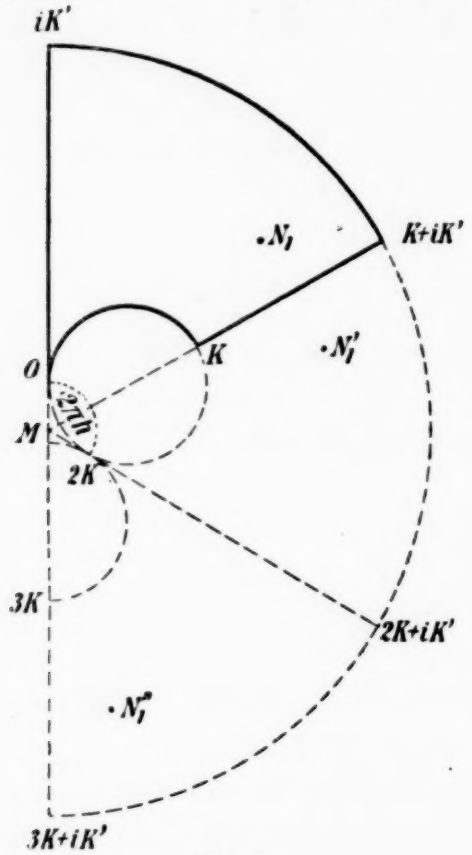

Fig. 2.

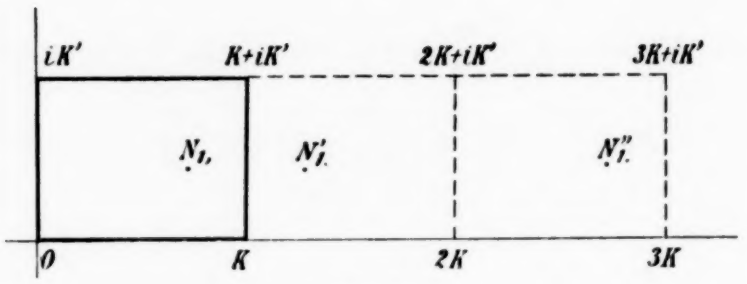

Fig. 3.

Betrachten wir einen Punkt N_1 in unserem Viereck (Fig. 2); wenn wir diesen Punkt zuerst an der Geraden $(M, K + iK')$ und dann an der Geraden $(M, 2K + iK')$ spiegeln, so erhält er eine Drehung um den Winkel $2\pi h$ um den Koordinatenursprung M, d. h. die komplexe Veränderliche s erhält den Faktor $e^{-2\pi ih}$. Das Bild dieses Punktes in der w-Ebene (Fig. 3), verschiebt sich von N_1 nach N_1'', d. h. der reelle Teil von w vergrößert sich um die Periode $2K$.

Betrachten wir jetzt die beiden anderen, sich nicht schneidenden Seiten. Durch eine lineare Substitution kann man sie in zwei konzentrische Kreise transformieren. Nehmen wir an, daß der Koordinatenursprung der s-Ebene im Zentrum dieser Kreise

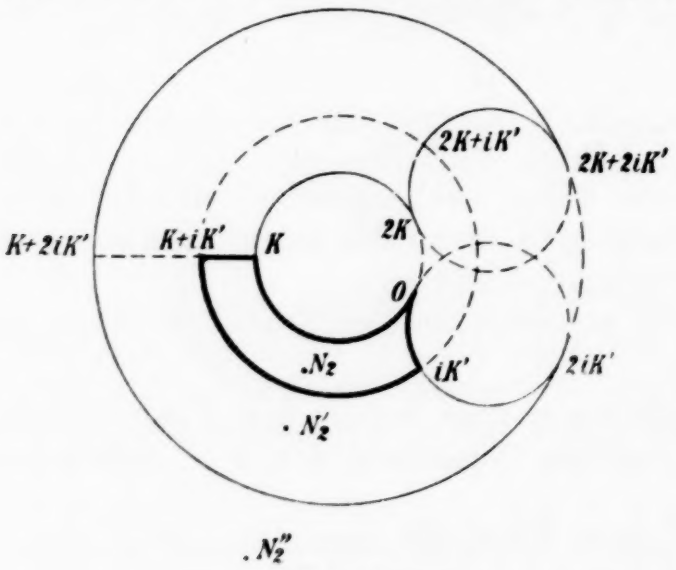

Fig. 4.

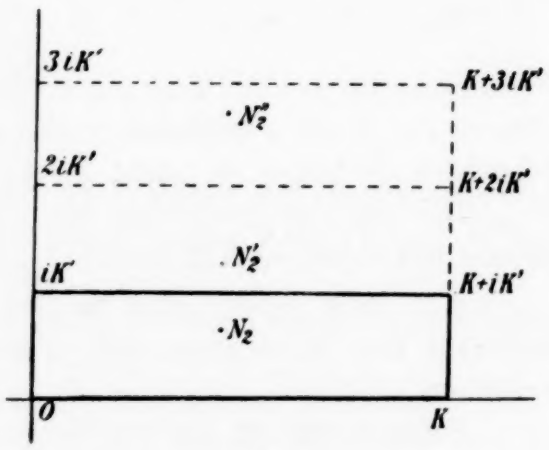

Fig. 5.

liegt. Unser Viereck erhält dann die in der Fig. 4 angegebene Gestalt. Die Punkte O, K, $K + iK'$, iK' der Fig. 5 entsprechen den gleichnamigen Punkten der Fig. 4.

Betrachten wir einen Punkt N_2 des Vierecks; wenn wir diesen Punkt zuerst am Kreise $(iK', 2K + iK')$ und dann am Kreise $(2iK', 2K + 2iK')$ spiegeln, so bleibt er auf demselben Radius-Vektor, sein Abstand vom Koordinatenursprung wird aber im Verhältnis $e^{2\pi p}$: 1 vergrößert, die komplexe Veränderliche s erhält den Faktor $e^{2\pi p}$. Das Bild dieses Punktes in der w-Ebene (Fig. 5) verschiebt sich von N_2 nach N_2'' d. h. der imaginäre Teil von w wächst um die Periode $2iK'$.

Betrachten wir jetzt andererseits die Gleichung (5) als eine Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten mit der Periode $2K$. Das allgemeine Integral einer solchen Gleichung ist bekanntlich von der Form

$$y = A_1 e^{-i\pi\bar{h}\frac{w}{2K}} \varphi_1(w) + A_2 e^{i\pi\bar{h}\frac{w}{2K}} \varphi_2(w), \tag{11}$$

wo $\varphi_1(w)$ und $\varphi_2(w)$ periodische Funktionen von der Periode $2K$ sind.

Damit der Quotient zweier Integrale der Gleichung (5) den Faktor $e^{-2\pi i\bar{h}}$ erhält, wenn w um $2K$ wächst, ist es offenbar notwendig, daß die Größe $\bar{h}$ der Formel (11) gleich unserem Parameter h ist.

Wenn wir nun die imaginäre Periode $2iK'$ der Koeffizienten von (5) ins Auge fassen, so können wir das allgemeine Integral dieser Gleichung in der Form

$$y = A_1 e^{\pi\bar{p}\frac{w}{2iK'}} \psi_1(w) + A_2 e^{-\pi\bar{p}\frac{w}{2iK'}} \psi_2(w) \tag{11*}$$

schreiben, wo $\psi_1(w)$ und $\psi_2(w)$ die Periode $2iK'$ besitzen. Auf analoge Weise schließen wir, daß die Größe $\bar{p}$ gleich p sein muß.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Größen h^2 und $-p^2$ eine ganz analoge Rolle spielen, so daß die Formeln, welche man für den Fall der sich schneidenden Seiten erhält, auch wenn die Seiten sich nicht schneiden, ihre Gültigkeit behalten, wenn man nur überall h durch ip ersetzt.

§ 4. Wir gehen zur Integration der Gleichung (5) über, und setzen

$$\frac{\pi w}{2K} = w_1 . \tag{12}$$

Indem wir die Funktion $\wp(w)$ in eine trigonometrische Reihe entwickeln, erhalten wir

$$\wp(w) - 4C = -4c_1 + \frac{\pi^2}{4K^2}\left\{\frac{1}{\sin^2 w_1} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2n\, w_1\right\},$$

wo $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist, und c_1 den Wert (9) hat. Wir entwickeln diese Reihe nach Potenzen von q und setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2n\, w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}\psi_n(\sin^2 w_1), \tag{13}$$

so daß ψ ein Polynom n-ten Grades von $\sin^2 w_1$ ist.

Ferner nehmen wir an, daß die Konstante c_1, oder vielmehr die Größe $\frac{4K^2}{\pi^2}c_1$ nach Potenzen von q^2 entwickelbar ist:

$$\frac{4K^2}{\pi^2}c_1 = f(h, q), \tag{14}$$

wo

$$(14^*) \qquad f(h,q) = -h^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(h)\, q^{2n},$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_n(h)$ vorläufig unbestimmt sind.

Dann läßt sich die Gleichung (5) schreiben

$$(15) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw_1^2} = -h^2 - \frac{1}{4\sin^2 w_1} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}[\,\psi_n(\sin^2 w_1) + \alpha_n(h)].$$

Wir setzen

$$(16) \qquad \sin^2 w_1 = t; \quad y = \bar{y}\sqrt[4]{t}$$

und erhalten

$$(17) \quad t(1-t)\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + \Big(1 - \frac{3}{2}\,t\Big)\frac{d\bar{y}}{dt} - \Big(\frac{1}{16} - \frac{h^2}{4}\Big)\bar{y} = \bar{y}\cdot\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}[\psi_n(t) + \alpha_n]$$

Wir bezeichnen mit Φ_1 das logarithmenfreie Integral dieser Gleichung und suchen seine Entwicklung nach Potenzen von q

$$(18) \qquad \Phi_1 = \varphi_0 + q^2\varphi_1 + q^4\varphi_2 + \cdots$$

Führen wir diese Entwicklung in die Gleichung (17) ein und vergleichen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von q, so erhalten wir folgende Gleichungen

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\Delta\varphi_0 = 0 \\ &\Delta\varphi_1 = \varphi_0\frac{\psi_1 + \alpha_1}{4} \\ &\Delta\varphi_2 = \varphi_0\frac{\psi_2 + \alpha_2}{4} + \varphi_1\frac{\psi_1 + \alpha_1}{4} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung mit $\Delta\varphi$ der Operator

$$(20) \qquad \Delta\varphi = t(1-t)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + [1 - (\alpha+\beta+1)\,t]\frac{d\varphi}{dt} - \alpha\beta\,\varphi$$

bezeichnet ist, und die Größen α und β die folgende Bedeutung haben:

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{h}{2}; \quad \beta = \frac{1}{4} - \frac{h}{2}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Gleichungen (19) bei passender Wahl der Konstanten $\alpha_n(h)$ mit Hilfe der Funktionen

$$(21) \quad f_1(h,k,t) = t^k\frac{\Gamma\big(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k\big)}{\Gamma(k+1)}\cdot F\Big(\frac{1}{4}+\frac{h}{2},\ \frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k,\ k+1,\ t\Big)$$

integriert werden können. Hier ist F das Zeichen einer hypergeometrischen Funktion [1]) und k eine positive ganze Zahl oder Null.

Die Lösung der homogenen Gleichung

$$(19\,a) \qquad \Delta\varphi_0 = 0$$

ist offenbar

$$(22) \qquad \varphi_0 = f_1(h, 0, t).$$

---

[1]) Es sei hier die Transformation

$$F\Big(\frac{1}{4}+\frac{h}{2},\ \frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k,\ k+1,\ \sin^2 w_1\Big) = F\,\frac{1}{2}+h,\ \Big(\frac{1}{2}-h+2k,\ k+1,\ \sin^2\frac{w_1}{2}\Big)$$

erwähnt, welche die Konvergenz der Reihe für f_1 verbessert.

Betrachten wir die inhomogene Gleichung

$$\Delta\varphi = f\,, \tag{19 b}$$

wo f eine Potenzreihe bezeichnet, die wir in der Form

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma^2(n+1)}\, g_n t^n \tag{23}$$

schreiben wollen.

Man überzeugt sich leicht, daß die Funktion

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{\Gamma^2(n+1)}\, c_n t^n \tag{24}$$

der Gleichung (19 b) genügt, falls die Koeffizienten c_n die Differenzengleichung

$$c_{n+1} - c_n = g_n \tag{25}$$

befriedigen.

Die rechte Seite der zweiten der Gleichungen (19) läßt sich offenbar in der Form (23) darstellen, wobei der Koeffizient $g_n^{(1)}$ eine rationale Funktion von n ist, nämlich

$$g_n^{(1)} = -\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{2}\right)^2}{h(1-h)}\left[\frac{1}{n+\alpha}-\frac{1}{n+\alpha-1}\right]+\frac{1}{4h}\left[\frac{1}{2(1-h^2)}-\alpha_1(h)\right]\frac{1}{n+\alpha}+\text{etc.}$$

Der Index (1) bei g_n soll andeuten, daß der Koeffizient sich auf die Funktion φ_1 bezieht; „etc." bedeutet hier und im folgenden einen Ausdruck, den man aus dem ausgeschriebenen durch Vertauschung von h mit $-h$ und α mit β erhält.

Setzt man hier

$$\alpha_1(h) = \frac{1}{2(1-h^2)}\,, \tag{26}$$

so wird $c_n^{(1)}$ ebenfalls eine rationale Funktion von n, und die Funktion φ_1 wird gleich

$$\varphi_1 = -\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{2}\right)}{h(1-h)} f_1(h,\,1,\,t) + \frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{h}{2}\right)}{h(1+h)} f_1(-h,\,1,\,t). \tag{27}$$

Folglich kann auch in der dritten der Gleichungen (19) die rechte Seite in der Form (23) dargestellt werden, wobei $g_n^{(2)}$ ebenfalls eine rationale Funktion von n wird.

Wir wollen nun beweisen, daß man in den Gleichungen (19) die Konstanten $\alpha_k(h)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ so wählen kann, daß sich alle Funktionen φ_m durch

$$f_1(h, k, t) \quad \text{und} \quad f_1(-h, k, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ausdrücken lassen. Nehmen wir an, daß diese Behauptung für die Funktionen φ bis φ_{m-1} inklusive zutreffe, und bilden die rechte Seite der $(m+1)$-ten der Gleichungen (19)

$$\Delta\varphi_m = \varphi_0\frac{\psi_m+\alpha_m}{4}+\varphi_1\frac{\psi_{m-1}+\alpha_{m-1}}{4}+\cdots+\varphi_{m-1}\frac{\psi_1+\alpha_1}{4}. \tag{19 c}$$

Der Koeffizient von t^n in den Funktionen φ_0 bis φ_{m-1} ist gleich dem Produkte von

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{\Gamma^2(n+1)}$$

mit einer rationalen Funktion von n, deren ganzer Teil sich auf eine Konstante reduziert und die in den Punkten $n = -\alpha+1$, $n = -\alpha+2$ usw. und $n = -\beta+1$, $n = -\beta+2$ usw. Pole erster Ordnung besitzt. Denselben Charakter muß also auch der Koeffizient von

t^n im Ausdruck auf der rechten Seite von (19c) haben. Bezeichnen wir diesen Koeffizient mit

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma^2(n+1)}\,g_n^{(m)},$$

so ist die Größe $g_n^{(m)}$ von der Form

$$(*) \qquad g_n^{(m)} = \frac{1}{(n+\alpha)\,(n+\beta)}\left[\frac{\alpha_m(h)}{4} + A\,(n,h)\right],$$

wo $A(n,h)$ eine rationale Funktion von n der soeben beschriebenen Art ist. Der Ausdruck (*) zeigt, daß die Summe der Residuen der Funktion $g_n^{(m)}$ über alle Pole gleich Null ist. Wählen wir nun die Konstante $\alpha_m(h)$ so, daß die Summe der Residuen über die Pole $n = -\alpha$, $n = -\alpha+1$ usw. für sich allein verschwindet, so verschwindet auch die entsprechende Summe über die Pole $n = -\beta$, $n = -\beta+1$ usw. Daraus folgt, daß die Größe $g_n^{(m)}$ als Summe der Glieder von der Form

$$b_n^{(n)}\left[\frac{1}{n+\alpha-k+1} - \frac{1}{n+\alpha-k}\right] + \text{etc.}$$

dargestellt werden kann; folglich wird die Größe $c_0^{(m)}$ eine rationale Funktion von n mit Polen in den Punkten $n = -\alpha+k$ und $n = -\beta+k$, so daß man sie in der Form

$$(28) \qquad c_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k^{(m)}(h)\,n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-k)} + \text{etc.} + c_0^{(m)}$$

darstellen kann.

Wählt man hier $c_0^{(m)} = 0$, so erhält man für die Funktion φ_m den Ausdruck

$$(29) \qquad \varphi_m = \sum_{k=1}^{m} d_k^{(m)}(h)\,f_1(h,k,t) + \sum_{k=1}^{m} d_k^{(m)}(-h)\,f_1(-h,k,t),$$

was zu beweisen war.

Für $t = 0$ ist

$$(30) \qquad \varphi_0 = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta); \qquad \varphi_m = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Wir wenden uns nun an das zweite Integral der Gleichung (17). Wir setzen

$$(31) \qquad f_2(h,k,t) = -\lg t \cdot f_1(h,k,t) + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l}\,\Gamma\left(l-k+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)\Gamma(k-l)\,\frac{t^l}{\Gamma(l+1)} + t^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+1)} \cdot$$

$$\left\{\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} + \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'\left(n+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(n+k+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)}{\Gamma\left(n+k+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)}\right\} \cdot t^n.$$

Aus den bekannten Eigenschaften der hypergeometrischen Funktionen folgt, daß nach der Umkreisung des Punktes $t = 1$ in positiver Richtung das Integral $f_1(h,k,t)$ in

$$(32) \qquad -f_1(h,k,t) + \frac{1}{\pi}\cos\pi h\, f_2(h,k,t)$$

übergeht und das Integral $f_2(h,k,t)$ sich nicht ändert.

Bezeichnen wir also mit Φ_2 die Reihe, welche aus der Reihe (18) für Φ hervorgeht, wenn wir in den Funktionen φ_0, φ_1 usw. $f_1(h,k,t)$ durch $f_2(h,k,t)$ ersetzen, so wird die

neue Reihe ebenfalls ein Integral der Gleichung (17). Dabei geht das Integral Φ_1 nach einer positiven Umkreisung des Punktes $t = 1$ in

$$(33) \qquad -\Phi_1 + \frac{1}{\pi}\cos \pi h\, \Phi_2$$

über, während das Integral Φ_2 sich nicht ändert.

Wir haben also (vorläufig rein formell) beide Integrale der Gleichung (17) gewonnen, und zwar in Form von Reihen, welche nach Potenzen von q^2 fortschreiten. Der Konvergenzbeweis für diese Reihen und für die Konstantenentwicklung (14) wird im § 7 gegeben.

§ 5. Bevor wir zur Untersuchung der durch den Quotienten beider Integrale geleisteten konformen Abbildung übergehen, wollen wir die Formeln für die analytische Fortsetzung der Funktionen

$$f_1\left(h, k, \sin^2 \frac{\pi w}{2K}\right) \text{ und } f_2\left(h, k, \sin^2 \frac{\pi w}{2K}\right)$$

im Viereck

$$(O, K, K + iK', iK')$$

der w-Ebene anführen.

Wir führen die Variable

$$(12) \qquad \frac{\pi w}{2K} = w_1 = u_1 + i v_1$$

ein, und setzen zuerst $v_1 = 0$, $w_1 = u_1$. Wir haben dann

$$(34) \quad f_1(h, k, \sin^2 u_1) = -2\sqrt{\pi}\cos u_1 F\left(\frac{3}{4} - \frac{h}{2},\ \frac{3}{4} + \frac{h}{2} - k,\ \frac{3}{2},\ \cos^2 u_1\right)$$
$$+ \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{h}{2} + k\right)} \cdot F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2},\ \frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k,\ \frac{1}{2},\ \cos^2 u_1\right).$$

$$(35) \quad f_2(h, k, \sin^2 u_1) =$$
$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(k + \frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(-k + \frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)$$
$$\cdot F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2},\ \frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k,\ \frac{1}{2},\ \cos^2 u_1\right).$$

Wir setzen jetzt $u_1 = 0$, $w_1 = i v_1$, und führen zwei weitere Funktionen

$$(36) \qquad f_3(h, k, t) = f_1(h, k, t) - \frac{1}{2\pi}\,(e^{i\pi h} + i)\, f_2(h, k, t)$$

$$(37) \qquad f_4(h, k, t) = f_1(h, k, t) - \frac{1}{2\pi}\,(e^{-i\pi h} + i)\, f_2(h, k, t)$$

ein. Wir haben dann

$$(38) \quad f_3(h, k, -sh^2 v_1) = e^{-\frac{3}{4}\pi i + \frac{\pi i h}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2} + k\right)}{\Gamma(k + 1 - h)}$$
$$\cdot (ch^2 v_1)^{-\frac{1}{4} + \frac{h}{2}} F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2},\ \frac{3}{4} - \frac{h}{2},\ k + 1 - h,\ \frac{1}{ch^2 v_1}\right)$$

oder

$$(38^*) \qquad f_3(h, k, -sh^2 v_1) = e^{-\frac{3}{4}\pi i + \frac{\pi i h}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2} + k\right)}{\Gamma(k + 1 - h)}$$
$$\cdot 2^{\frac{1}{2} - h} e^{-v_1\left(\frac{1}{2} - h\right)} \cdot F\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2} - k, \; k + 1 - h, e^{-2v_1}\right)$$

und

$$(39) \qquad f_4(h, k, -sh^2 v_1) = (-1)^k e^{-\frac{3}{4}\pi i - \frac{\pi i h}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k\right)}{\Gamma(-k + 1 + h)}$$
$$\cdot (ch^2 v_1)^{-\frac{1}{4} - \frac{h}{2} + k} \cdot F\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k, \; \frac{3}{4} + \frac{h}{2} - k, \; -k + 1 + h, \; \frac{1}{ch^2 v_1}\right)$$

oder

$$(39^*) \qquad f_4(h, k, -sh^2 v_1) = (-1)^k e^{-\frac{3}{4}\pi i - \frac{\pi i h}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k\right)}{\Gamma(-k + 1 + h)}$$
$$\cdot 2^{\frac{1}{2} + h - 2k} e^{-v_1\left(\frac{1}{2} + h - 2k\right)} \cdot F\left(\frac{1}{2} - k, \; \frac{1}{2} + h - 2k, \; h - k + 1, \; e^{-2v_1}\right).$$

Diese Formeln liefern die gesuchte analytische Fortsetzung.

§ 6. Bevor wir zur konformen Abbildung übergehen, führen wir die Funktionen

$$(40) \qquad \Phi_3 = \Phi_1 - \frac{1}{2\pi}(e^{i\pi h} + i)\,\Phi_2;$$

$$(41) \qquad \Phi_4 = \Phi_1 - \frac{1}{2\pi}(e^{-i\pi h} + i)\,\Phi_2$$

ein. Die Funktion Φ_3 wird erhalten, indem man in Φ_1 die Funktion $f_1(h, k, t)$ durch $f_3(h, k, t)$ und $f_1(-h, k, t)$ durch $f_4(-h, k, t)$ ersetzt. Die Funktion Φ_4 erhält man aus Φ_3 durch Vorzeichenwechsel von h. Aus den Formeln (38*) und (39*) geht hervor, daß die Funktion Φ_3 den Faktor $ie^{-i\pi h}$ und die Funktion Φ_4 den Faktor $ie^{i\pi h}$ erhält, wenn w um $2K$ wächst. Bei der von uns getroffenen Wahl der Konstante c_1 (Formel 14) besitzen also die Integrale Φ_3 und Φ_4 die verlangte Periodizitätseigenschaft in bezug auf die reelle Periode.

Wir betrachten nun die von der Funktion

$$(42) \qquad s(w) = \frac{\Phi_3(w)}{\Phi_4(w)}$$

geleistete konforme Abbildung.

Bei reellem w

$$w = u$$

sind die Funktionen Φ_1 und Φ_2 beide reell. Aus den Formeln (40) und (41) folgt, daß

$$(43) \qquad \left| s(u) - \frac{1}{1 - \sin \pi h} \right| = \frac{\sin \pi h}{1 - \sin \pi h}$$

ist.

Bei rein imaginärem w

$$w = i\,v$$

ist Φ_1 reell und $\Phi_2 = -i\pi\Phi_1 +$ reelle Größe. Daraus folgt

$$(44) \qquad \arg s(i\,v) = \pi h.$$

Für

$$w = K + iv$$

sind wegen (38*) und (39*) sowohl $i\Phi_3$ als auch $i\Phi_4$ reell, folglich ist dann

(45) $$s(K + iv) = \text{reelle Größe.}$$

Die Formeln (43), (44) und (45), welche sich auf die drei Seiten des Vierecks beziehen, gelten für beliebige reelle Werte der Koeffizienten $d_k^{(m)}(h)$ der Formel (29); auf der vierten Seite

$$w = u + iK'$$

des Vierecks dagegen bleibt der Betrag von s nur dann konstant

(46) $$|s(u + iK')| = R,$$

wenn die Koeffizienten $d_k^{(m)}(h)$ so gewählt sind, daß die Gleichung (4) befriedigt ist (d. h. nach dem Verfahren des § 4).

Es sei hier bemerkt, daß die Bedingung (46) zur Bestimmung der Koeffizienten unabhängig von der Differentialgleichung dienen kann [1]).

Geometrische Betrachtungen liefern unschwer den folgenden Ausdruck für die Konstante R durch die in § 2 eingeführten Parameter p' und h:

(47) $$R = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi h}{2}\right)\left(ch\,\pi p' \operatorname{tg}\pi h + \sqrt{ch^2\pi p' \operatorname{tg}^2\pi h + 1}\right).$$

Andererseits stellt die linke Seite von (46) eine bestimmte Funktion von h und von q dar. Indem man sie dem Ausdruck (47) gleichsetzt, gewinnt man eine transzendente Gleichung zur Bestimmung der Konstante q, d. h. des Periodenverhältnisses der doppelt periodischen Funktion $\wp(w)$.

Wir wollen nun, unabhängig von der *Schwarz*schen Theorie, zeigen, daß die linke Seite von (46) wirklich konstant ist, und den Wert dieser Konstante bestimmen.

Wie es weiter (Formel 60) gezeigt wird, sind die Funktionen $\varphi_1(w)$ und $\varphi_2(w)$ der Formel (11) für $w = u + iK'$ von der Form

(48) $$\varphi_1(u + iK') = \chi\left(h, e^{\frac{i\pi u}{K}}\right) + \chi\left(-h, e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right)$$

(48*) $$\varphi_2(u + iK') = \chi\left(-h, e^{\frac{i\pi u}{K}}\right) + \chi\left(h, e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right),$$

wo $\chi(h, z)$ eine für $|z| = 1$ analytische Funktion von z mit reellen Koeffizienten ist.

Setzen wir $\frac{\pi u}{2K} = u_1$, so ergibt der Vergleich des Ausdrucks für Φ_3 mit der Formel (11), mit Berücksichtigung von (16), die Gleichung

(49) $$\sqrt{1 - qe^{2iu_1}}\, e^{-iu_1\left(\frac{1}{2} - h\right)}\, \Phi_3 = L(h, q) \cdot \varphi_1\left(\frac{2K}{\pi} u_1 + iK'\right),$$

wo $L(h, q)$ eine Konstante bezeichnet. Daraus erhält man

(50) $$e^{2ihu_1}\frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{L(h, q)}{L(-h, q)} \cdot \frac{\chi(h, e^{2iu_1}) + \chi(-h, e^{-2iu_1})}{\chi(h, e^{-2iu_1}) + \chi(-h, e^{2iu_1})}$$

und folglich

(51) $$R = \left|\frac{\Phi_3}{\Phi_4}\right| = \left|\frac{L(h, q)}{L(-h, q)}\right|.$$

---

[1]) Die Koeffizienten $d_n^{(m)}$ erhalten eine etwas einfachere Form, wenn man sie so wählt, daß durch den Zähler und Nenner des Ausdrucks für $s(w)$ die Gleichung (8), nicht aber die Gleichung (5) befriedigt wird.

Bezeichnen wir andererseits mit $M(h, q)$ das konstante Glied der Entwicklung der linken Seite von (49) nach positiven und negativen Potenzen von e^{2iu}, so haben wir offenbar die Beziehung

$$M(h, q) = L(h, q) \cdot \{\chi(h, 0) + \chi(-h, 0)\} \tag{52}$$

und folglich

$$R = \left| \frac{M(h, q)}{M(-h, q)} \right| . \tag{53}$$

Diese Gleichung lautet, ausführlicher geschrieben, nach einigen Reduktionen

$$\frac{\Gamma(1-h)}{\Gamma(1+h)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+h)}{\Gamma(\frac{1}{2}-h)} \left(ch\pi p' \operatorname{tg}\pi h + \sqrt{ch^2\pi p' \operatorname{tg}^2\pi h + 1}\right) = q^{-h} \frac{\Pi(-h, q)}{\Pi(h, q)} , \tag{54}$$

wo $\Pi(h, q)$ die Reihe

$$\Pi(h, q) = 1 + \frac{q^2}{2^4(1+h)^2} + \frac{q^4}{2^{10}}\left[\frac{30}{(1+h)^2} - \frac{4}{(1+h)^4} + \frac{81}{(2+h)^2}\right] + \cdots \tag{55}$$

bezeichnet [1]). Die Gleichung (54) ist die gesuchte transzendente Gleichung zur Bestimmung des Periodenverhältnisses. Sie kann leicht nach der Methode der sukzessiven Näherungen gelöst werden. Zur Berechnung der ersten Näherung ist $\Pi(h, q) = 1$ zu setzen.

Hätten wir den Fall betrachtet, wo die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks sich nicht schneiden, so würden wir nach analogen Auseinandersetzungen [2]) zu derselben Gleichung (54) gelangen, wo aber ip statt h stehen würde.

Im § 8 wird eine andere Beziehung zwischen den Konstanten h und p' und dem Periodenverhältnis abgeleitet.

§ 7. Wir wollen jetzt den Beweis der Gültigkeit der Formel (48) und der Konvergenz der Reihen (14*) und (18) nachholen.

Zu diesem Zwecke wollen wir die Gleichung (5) für $w = u + iK'$ ausführlicher betrachten. Setzen wir $\frac{2K}{\pi} u = u_1$ und führen die Konstante $f(h, q)$ (14*) ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du_1^2} = f(h, q) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2nu_1 . \tag{56}$$

Die Summe auf der rechten Seite entwickeln wir nach Potenzen von q

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \psi_n \tag{57}$$

und suchen eine Lösung von der Form

$$y = e^{ihu_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \varphi_n\right] . \tag{58}$$

(Die Zeichen φ_n und ψ_n haben hier offenbar eine andere Bedeutung als bisher).

Setzt man die Entwickelbarkeit von $f(h, q)$ nach Potenzen von q voraus und führt den Ausdruck (58) in die Differentialgleichung ein, so erhält man der Reihe nach die Gleichungen

---

[1]) Die ersten zwei Koeffizienten der Entwicklung von $\Pi(h, q)$ sind liebenswürdigerweise von Herrn *G. Gamow* berechnet worden.

[2]) In einem analog der Formel (46) gebauten Ausdrucke hätten wir nicht die Moduln, sondern die Argumente gleichsetzen müssen. Dieser Fall ist in meiner oben zitierten Arbeit (Arch. f. Elektrotechnik) ausführlich behandelt worden.

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + 2ih\varphi_1' &= \psi_1 \\ \varphi_2'' + 2ih\varphi_2' &= \psi_1\varphi_1 + \alpha_1 + \psi_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{59}$$

Die Konstanten α_1, α_2 usw. wollen wir aus den Bedingungen bestimmen, daß die Mittelwerte der rechten Seiten von (59) gleich Null sein sollen [1]), und die Integrationskonstanten durch die Forderung festsetzen, daß jede der Funktionen φ_1, φ_2 usw. periodisch mit der Periode π und ohne freies Glied sein soll. Eine solche Bestimmung ist offenbar immer möglich; dabei ergibt sich für φ_n ein Ausdruck von der Form

$$\varphi_n = \omega_n\,(h, e^{2iu_1}) + \omega_n\,(-h, e^{-2iu_1})\,, \tag{60}$$

wo $\omega_n\,(h, e^{2iu_1})$ ein Polynom n-ten Grades von e^{2iu_1} mit in h rationalen Koeffizienten ist. Die Formel (60) läßt sich beweisen, wenn man berücksichtigt, daß die linken Seiten von (59) bei gleichzeitigem Wechsel der Vorzeichen von h und i sich nicht ändern.

Wir wenden uns nun zum Konvergenzbeweise der Reihen (14*) und (58) und stellen zunächst zwei Hilfssätze auf.

Hilfssatz 1. Wenn in der Differentialgleichung

$$\varphi'' + 2ih\varphi' = f$$

die rechte Seite von der Form

$$f = \Sigma b_k e^{2iku_1}\,, \qquad (k \neq 0)$$

mit

$$\Sigma\,|b_k| < B$$

ist, so genügen die Koeffizienten c im periodischen Integral

$$\varphi = -\sum \frac{b_k}{4k(k+h)}\, e^{2iku_1} = \Sigma c_k e^{2iku_1}$$

dieser Gleichung der Ungleichung

$$\Sigma\,|c_k| < \frac{1}{4(1-h)}\, B.$$

Hilfssatz 2. Es seien zwei Funktionen

$$f = \Sigma b_k e^{2iku_1} \quad \text{mit} \quad \Sigma\,|b_k| < B$$

und

$$F = \Sigma c_k e^{2iku_1} \quad \text{mit} \quad \Sigma\,|c_k| < C$$

gegeben. Dann genügen die Koeffizienten d_k im Produkte

$$f \cdot F = \text{Mittelwert von } f \cdot F + \Sigma d_k e^{2iku_1}, \quad (k \neq 0)$$

der beiden Funktionen der Ungleichung

$$\Sigma\,|d_k| < B \cdot C.$$

Die Richtigkeit dieser zwei Sätze ist evident.

Wir bezeichnen mit Ψ_n die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von e^{2iu_1} in der Funktion ψ_n und bemerken, daß Ψ_n gleich dem Werte von ψ_n für $u_1 = 0$ ist.

Aus der ersten Gleichung (59) folgt auf Grund des ersten Hilfssatzes die Ungleichung

---

[1]) Offenbar müssen die auf diese Weise bestimmten Konstanten α_n mit den früher eingeführten identisch sein.

$$|\varphi_1| < \frac{\Psi_1}{4(1-h)}$$

(unter $|\varphi_1|$ verstehen wir die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten in φ_1).

Aus der zweiten Gleichung (59) schließen wir, indem wir zuerst den zweiten und dann den ersten Hifssatz anwenden, daß

$$|\varphi^2| < \left(\frac{\Psi_1}{4(1-h)}\right)^2 + \frac{\Psi_2}{4(1-h)}$$

ist, usw.

Das Gesetz der Bildung der rechten Seiten der Ungleichungen ist klar; wir haben

$$(61) \qquad |\varphi_n| < \text{Koeffizient von } q^n \text{ im Ausdruck } \frac{1}{1 - \frac{\Sigma \Psi_n q^n}{4(1-h)}}.$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe (58), wenn die Bedingung

$$(62) \qquad \frac{1}{4(1-h)} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n q^n = \frac{1}{4(1-h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n q^n}{1-q^{2n}} = \frac{K(K-E)}{4\pi^2(1-h)} < 1$$

erfüllt ist. Aus der Formel

$$\alpha_{\frac{n}{2}} = - \text{ Mittelwert von } (\psi_1 \varphi_{n-1} + \cdots + \psi_{n-1} \varphi_1)$$

folgt, daß diese Bedingung auch für die Konvergenz der Reihe (14*) hinreicht.

Die Ungleichung

$$(63) \qquad \frac{K(K-E)}{4\pi^2} < \frac{\varkappa^2}{32\,\varkappa'^2}$$

sei hier erwähnt.

Wir wollen jetzt den Beweis der Konvergenz der Reihe (18) für Φ_1 andeuten, für Werte von w, die die Ungleichung

$$(64) \qquad -2K' < Re\left(\frac{w}{i}\right) < 2K'$$

befriedigen. Wegen der Periodizitätseigenschaften der Funktion Φ_1 genügt es, die Konvergenz im Innern des Rechtecks

$$-2K < Re\,(w) < 2K$$
$$-2K' < Re\left(\frac{w}{i}\right) < 2K'$$

zu zeigen. Wir schreiben die Gleichung (15) in der Form

$$(65) \qquad \frac{d^2y}{dw_1^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sin^2 w_1}\right) y = y\,F(q, w_1).$$

Hier ist $F(q, w)$ eine analytische Funktion von q, wenn die Werte von w im Innern des soeben erwähnten Rechtecks liegen. Führen wir die Funktion

$$\bar{y} = \frac{y}{\sqrt{\sin w_1}},$$

so genügt sie der Integralgleichung

$$\bar{y}(w_1) = c_1 + c_2 \lg \operatorname{ctg} \frac{w_1}{2} + \int_0^{w_1} \sin v \lg \frac{\operatorname{ctg} \frac{v}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{w_1}{2}} \cdot F(q, v) \cdot \bar{y}(v)\, dv,$$

wobei im Fall $\bar{y} = \Phi_1$ die Konstanten c_1 und c_2 die folgenden Werte haben:

$$c_1 = \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right);$$
$$c_2 = 0.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß die Lösung dieser Integralgleichung eine Funktion von q ist, welche in demselben Gebiete wie $F(q, v)$ analytisch ist. Daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit unserer Behauptung.

§ 8. Indem wir die reelle Periode der Funktion $\wp(w)$ betrachteten, gewannen wir den folgenden Ausdruck für die Konstante C der Gleichung (5) [Formeln (9) und 14)]:

$$C = -\frac{1+\varkappa^2}{12} + \frac{K-E}{4K} + \frac{\pi^2}{4K^2} f(h, q). \tag{66}$$

Hätten wir die imaginäre Periode der Funktion $\wp(w)$ und die anderen zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks betrachtet, so würden wir für dieselbe Konstante C den folgenden Ausdruck erhalten:

$$C = \frac{1+\varkappa'^2}{12} - \frac{K'-E'}{4K'} - \frac{\pi^2}{4K'^2} f(ip', q). \tag{66*}$$

Hier bezeichnen q', K', E' die dem komplementären Modul $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$ entsprechenden Größen. Indem wir die beiden Ausdrücke für C gleichsetzen und die *Legendre*sche Relation

$$\frac{E}{K} + \frac{E}{K'} = 1 + \frac{\pi}{2KK'}$$

benutzen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{K^2} f(h, q) + \frac{\pi^2}{K'^2} f(ip', q') = \frac{\pi}{2KK'}. \tag{67}$$

Diese Gleichung könnte, ebenso wie die Gleichung (54), zur Bestimmung des Periodenverhältnisses dienen. Sie hat aber den Nachteil, daß die Reihen für $f(h, q)$ und $f(ip, q')$ verschiedene Konvergenzgebiete besitzen.

Zusammenfassung.

Man sucht zunächst die konforme Abbildung des Kreisvierecks auf ein Rechteck. Nach der *Schwarz*schen Methode wird dieselbe durch den Quotienten zweier Integrale der *Laméschen* Differentialgleichung

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw^2} = -\frac{1}{4}\wp(w) + C \tag{*}$$

geleistet, welche zwei Konstanten enthält, nämlich das Periodenverhältnis $\tau = \frac{iK'}{K}$ der doppeltperiodischen Funktion $\wp(w)$ und die Konstante C. Um diese Konstanten zu bestimmen, fordert man erstens, daß ein Integral von (*) sich mit einem gegebenen Faktor multipliziert, wenn w um die reelle Periode von $\wp(w)$ wächst, und zweitens daß ein anderes Integral sich mit einem anderen gegebenen Faktor multipliziert, wenn w um eine imaginäre Periode zunimmt. Die Gleichung (*) wird durch eine nach Potenzen von $q = e^{\pi i \tau}$ fortschreitende Reihe integriert, deren Glieder sich durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken lassen. Die Konstante C wird ebenfalls nach Potenzen von q entwickelt. Die Größe q wird durch eine transzendente Gleichung bestimmt, deren Lösungen sich leicht in sukzessiven Näherungen berechnen lassen. Alle vorkommenden Reihen konvergieren sehr schnell und sind für numerische Rechnungen gut geeignet.

Eingegangen 9. Februar 1928.

Über symmetrische Grundfunktionen natürlicher Zahlen.

Von *O. Gruder* in Wien.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung ... 152
1. Potenzen einer Zahlenfolge. Reziproke Zahlenfolgen ... 154
2. Zwei Sätze über reziproke Zahlenfolgen ... 156
3. Die einer Zahlenfolge eindeutig zugeordnete Folge ganzer rationaler Funktionen $T_n(x)$ ... 157
4. Bernoullische und harmonische Zahlen ... 159
5. Die Funktionen $T_n(x)$ für harmonische Zahlen ... 160
6. Das der Bernoullischen Funktion analoge Polynom für symmetrische Grundfunktionen natürlicher Zahlen. Beweis eines Satzes von *Frobenius* ... 162
7. Verallgemeinerung zweier Formeln von *Frobenius* ... 164
8. Rekursionsformeln für die Koeffizienten von $T_n(x)$ ... 166
9. Independente Formeln für die Koeffizienten von $T_n(x)$. Independente Darstellung der Bernoullischen durch die harmonischen Zahlen ... 169
10. Kongruenzen $F_n(p)$ (mod. p) ... 172
11. Kongruenzen $F_n(gh)$ (mod. g) ... 176
12. Verallgemeinerungen des *Wilson*schen Satzes ... 177

Für die Summe

$$S_n(x) = 0^n + 1^n + \cdots + (x-1)^n \qquad (n \geqq 0,\ S_0(x) = x)$$

gilt die bekannte Formel

$$S_n(x) = \frac{(B+x)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1}.$$

Wird $S_n(x)$ durch die rechte Seite dieser Formel definiert und als eine Funktion der *Variablen* x aufgefaßt, so hat die Ableitung $S_n'(x)$ für $x = 0$ den Wert B_n und für $x = 1$ den Wert $(-1)^n B_n$.

Die Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $0, 1, \ldots, x-1$ ist eine ganze Funktion $(2n)$-ten Grades von x, welcher man nach *Frobenius* [1]) die Form geben kann:

$$F_n(x) = (-1)^n \binom{x-1}{n} T_n(x).$$

$T_n(x)$ ist eine ganze Funktion n-ten Grades. Sie hat für $x = -1$ den Wert B_n und ihre Ableitung hat für $x = 0$ den Wert $(-1)^n \frac{B_n}{n}$.

Der Gedanke, $T_n(x)$ als eine ganze *Funktion einer Variablen* aufzufassen, findet sich zum ersten Mal bei *Frobenius* vor. Er bemerkt diesbezüglich in der Einleitung zu der angeführten, inhaltsreichen Abhandlung: „*Lucas*, dem diese Theorie so viel zu verdanken hat, scheint der Gedanke ferngelegen zu haben, $T_n(x)$ als eine ganze Funktion

[1]) *G. Frobenius*, Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1910, Seite 809—847.

einer Variabeln aufzufassen, deren Werte für alle ganzzahligen Werte von x, mit Ausschluß der Werte $-1, -2, \ldots, -n$, angebbar sind, so daß sie als bekannt angesehen werden, und die für $x = -1$ zur Definition der *Bernoulli*schen Zahlen benutzt werden kann".

Die Untersuchung der Funktionen $T_n(x)$ ist das Ziel dieser Arbeit. Wir definieren einleitend den Begriff der Potenz einer Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \ldots$ und zeigen im Anschluß daran, daß man mit Hilfe einer gewissen Differenzengleichung einer jeden Zahlenfolge $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (in welcher $A_0 = 1$ ist), eine Folge ganzer, rationaler Funktionen $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x), \ldots$ eindeutig zuordnen kann, welche die folgenden Eigenschaften haben: 1. $T_n(x)$ ist vom Grade n. 2. Wird die (-1)-te „Potenz" der Folge $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mit $C_0, C_1, C_2, \ldots$ bezeichnet, so bestehen die Gleichungen:

$$T_n(1) = A_n, \qquad T_n(k) = (A + A + \cdots + A)^n,$$
$$T_n(-1) = C_n, \quad T_n(-k) = (C + C + \cdots + C)^n.$$

Setzt man insbesondere $A_n = \dfrac{1}{n+1}$, so erhält man die von *Frobenius* betrachteten, speziellen $T_n(x)$, die (nach obiger Formel für $F_n(x)$) mit den symmetrischen Grundfunktionen natürlicher Zahlen zusammenhängen. Hierdurch erweist sich die merkwürdige Beziehung $T_n(-1) = B_n$ als Spezialfall einer allgemeinen Eigenschaft jener Polynome $T_n(x)$, die als Potenzen einer beliebigen Zahlenfolge A_n definiert werden können. Auf diesem Wege erhalten wir die schon von *Frobenius* bewiesenen sowie weitere Sätze für die Polynome $T_n(x)$.

Der zwischen den *Bernoulli*schen Zahlen B_n und den reziproken Werten natürlicher Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ bestehende Zusammenhang, (der auch einfach den beiden Reihen:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

entnommen werden kann), spielt bei der hier angewendeten Methode eine besondere Rolle. Nach dieser Methode ist es möglich, Formeln, welchen die *Bernoulli*schen Zahlen B_n genügen, solche für die Zahlen $A_n = \dfrac{1}{n+1}$ (und umgekehrt) zur Seite zu stellen. Auf dem gleichen Wege ergibt sich eine independente Darstellung *Bernoulli*scher Zahlen durch reziproke Werte natürlicher Zahlen.

Frobenius hat für die Funktion $T_n(x)$ den Koeffizienten von x und von x^2 (den letzteren für ein ungerades n) berechnet [1]). Das Ziel dieser Arbeit erforderte daher auch die Aufstellung allgemeiner Formeln für alle Koeffizienten von $T_n(x)$. Durch diese Formeln wird gezeigt, in welcher Weise die *Bernoulli*schen Zahlen in allen Koeffizienten von $T_n(x)$ auftreten. Es folgt ein Satz über die in den Nennern dieser Koeffizienten vorkommenden Primzahlen, der einige zahlentheoretische Anwendungen zu machen gestattet.

Die symmetrischen Grundfunktionen natürlicher Zahlen genügen mehreren interessanten Kongruenzen. Die einfachste derselben ist der *Wilson*sche Satz $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Auf Grund der für die Koeffizienten von $T_n(x)$ entwickelten Formeln war es möglich, mehrere dieser Kongruenzen, die bisher auf verschiedenen Wegen abgeleitet wurden, einheitlich zu beweisen und durch weitere Kongruenzen zu ergänzen. Hierbei konnte insbesondere der von *Glaisher* für $(p-1)! \pmod{p^2}$ aufgestellten Kongruenz eine weitere modulo p^3 hinzugefügt werden.

---

[1]) l. c., Seite 836 und 837.

1.

Es mögen einleitend einige Bezeichnungen und Definitionen festgesetzt werden.

Unter $A_n, B_n, C_n, \ldots$ verstehen wir endliche, für jeden ganzzahligen, nichtnegativen Wert von n wohldefinierte Größen. Es soll gestattet sein, $A^n, B^n, C^n, \ldots$ anstatt $A_n, B_n, C_n, \ldots$ zu schreiben, und diese Schreibweise, bei welcher Exponenten dieselbe Bedeutung wie Indizes haben, soll (um Eindeutigkeit zu erzielen) nur auf große Buchstaben beschränkt werden. Demgemäß bedeute für ganzzahlige, nichtnegative n die linke Seite der folgenden Formeln eine abgekürzte Schreibweise für die rechts stehende Summe:

$$(1) \qquad (A+B)^n = A_n B_0 + \binom{n}{1} A_{n-1} B_1 + \binom{n}{2} A_{n-2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n} A_0 B_n,$$

$$(2) \qquad (A+B+\cdots+F)^n = \sum \frac{n!}{a!\,b!\cdots f!} A_a B_b \cdots F_f.$$

Die letzte Summe ist nach dem polynomischen Lehrsatz zu entwickeln, wobei ausdrücklich zu bemerken ist, daß Faktoren mit dem Index 0 ebenfalls anzuschreiben sind. Es ist also insbesondere

$$(3) \qquad (A+B+\cdots+F)^0 = A_0 B_0 \cdots F_0.$$

Für die durch (1) *und* (2) *definierten Symbole gilt das kommutative und das assoziative Gesetz*, da es für die rechten Seiten von (1) und (2) gilt. Es ist:

$$(4) \qquad (A+B)^n = (B+A)^n,$$

$$(5) \qquad (A+(B+C))^n = ((A+B)+C)^n = (A+B+C)^n.$$

Die wohldefinierte *Folge von Zahlen* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ heiße im folgenden kurz *die Folge* A_n.

Als Produkt der Folgen A_n *und* B_n *definieren wir die Folge* $(A+B)^n$. Demgemäß ist die nach (2) zu berechnende Folge $(A+B+\cdots+F)^n$ das Produkt der Folgen $A_n, B_n, \ldots, F_n$. *Die so definierte Multiplikation von Folgen ist kommutativ und assoziativ.*

Das Produkt von k *gleichen Folgen* A_n *möge die* k*-te Potenzfolge* (auch kürzer die k-te Potenz) *der Folge* A_n *heißen.* Bezeichnet man die so entstandene Folge (deren Zahlen von k abhängig sind) mit $T_0(k), T_1(k), T_2(k), \ldots$, so ist [1]):

$$(6) \qquad \begin{aligned} &T_n(1) = A_n, \quad T_n(2) = (A+A)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_i A_{n-i}, \\ &T_n(k) = \underbrace{(A+A+\cdots+A)}_{(k)}{}^n, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Klammer das Symbol A (wie durch das unten angeschriebene Zeichen (k) angedeutet) k-mal als Summand erscheint.

Die Folge $1, 0, 0, \ldots$, deren erste Zahl gleich 1 und alle anderen Zahlen gleich 0 sind, *möge die Einheitsfolge heißen.* Das Produkt irgend einer Folge A_n mit der Einheitsfolge ergibt (wie man leicht sieht) wieder die Folge A_n.

Zwei Folgen sollen zueinander reziprok heißen, wenn ihr Produkt die Einheitsfolge ergibt. Die Folgen A_n und B_n sind also reziprok, wenn die Gleichungen

$$(7) \qquad A_0 B_0 = 1, \quad (A+B)^n = 0, \qquad n > 0,$$

für alle ganzzahligen, positiven n erfüllt sind. Zu jeder Folge A_n, deren erste Zahl A_0 von Null verschieden ist, existiert immer eine, durch (7) eindeutig bestimmte, reziproke Folge B_n. Die Einheitsfolge ist zu sich reziprok.

---

[1]) Gegen die näherliegende Bezeichnung $\{A_n\}^k$ spricht der Umstand, daß — wie später gezeigt wird — die $\{A_n\}^k$ ganze rationale Funktionen von k sind.

Als $(-k)$-te Potenzfolge einer Folge A_n definieren wir die $(+k)$-te Potenzfolge der zu A_n reziproken Folge B_n. Es ist also für jede ganze, positive Zahl k:

$$T_n(-k) = (\underbrace{B + B + \cdots + B}_{(k)})^n. \tag{8}$$

Als nullte Potenz einer jeden Folge definieren wir die Einheitsfolge. Es sei also:

$$T_0(0) = 1, \quad T_n(0) = 0, \quad n > 0. \tag{9}$$

Geht man von der Folge B_n aus und bezeichnet ihre Potenzfolgen mit $U_n(k)$, so ist A_n die zu B_n reziproke Folge und man hat:

$$\begin{gathered} U_n(k) = \underbrace{(B + B + \cdots + B)^n}_{(k)}, \quad U_n(-k) = \underbrace{(A + A + \cdots + A)^n}_{(k)}, \\ U_n(k) = T_n(-k), \quad U_n(-k) = T_n(k). \end{gathered} \tag{10}$$

Die Folgen $U_n(k)$ und $T_n(k)$ sind, wie man leicht sieht, reziproke Folgen:

$$\begin{gathered} U_0(k)\, T_0(k) = 1, \qquad (U(k) + T(k))^n = 0, \quad n > 0, \\ U_0(-k)\, T_0(-k) = 1, \quad (U(-k) + T(-k))^n = 0, \quad n > 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Für die durch (6), (8), (9) definierten *Potenzfolgen $T_n(k)$ einer Folge A_n gilt die Gleichung*:

$$(T(k) + T(l))^n = T_n(k + l) \tag{12}$$

für alle ganzzahligen Werte von k und l, die $\gtrless 0$ sind.

Beweis: Besteht zwischen den Zahlen U_n, V_n, W_n die Beziehung $(U + V)^n = W_n$ für alle $n \geqq 0$, so ist W_n das allgemeine Glied der Produktfolge der Folgen U_n und V_n. Die kürzere Ausdrucksweise: „W_n ist das Produkt der Folgen U_n und V_n" soll dasselbe bedeuten. Die linke Seite von (12) ist also das Produkt der Folgen $T_n(k)$ und $T_n(l)$. Nach (6) und (8) ist $T_n(k)$ das Produkt von k der Folgen A_n (bei $k > 0$) oder von k der Folgen B_n (bei $k < 0$). Sind k und l positiv oder beide negativ, so folgt die Richtigkeit von (12) aus der Giltigkeit des assoziativen Gesetzes (5). Ist hingegen etwa k positiv und l negativ, so kann die linke Seite von (12), das ist das Produkt der Folgen $T_n(k)$ und $T_n(l)$, als Produkt der Folgen:

$$\underbrace{A_n, A_n, \ldots, A_n}_{k}, \quad \underbrace{B_n, B_n, \ldots, B_n}_{l' = -l}$$

angeschrieben werden. Dieses Produkt ist nach (4) kommutativ, also gleich dem Produkte der Folgen:

$$\begin{gathered} A_n, B_n, A_n, B_n, \ldots, A_n, A_n, A_n, A_n \text{ bei } k > (-l), \\ A_n, B_n, A_n, B_n, \ldots, B_n, B_n, B_n, B_n \text{ bei } k < (-l). \end{gathered}$$

Das Produkt der Folgen A_n und B_n ergibt aber die Einheitsfolge, welche (wie oben bemerkt) mit einer Folge multipliziert, diese ungeändert läßt. Man kann daher alle Paare A_n, B_n als Faktoren weglassen und erhält so:

bei $k > (-l)$ das Produkt der Folgen $A_n, A_n, \ldots, A_n$ in der Anzahl $k + l$,
bei $k < (-l)$ das Produkt der Folgen $B_n, B_n, \ldots, B_n$ in der Anzahl $-k - l$,

also in beiden Fällen (wegen (6) oder (8)) als Endprodukt $T_n(k + l)$. Ist schließlich eine der Zahlen k und l (oder beide) gleich Null, so ergibt sich die Richtigkeit von (12) sofort, wenn man in die linke Seite von (12), das ist in die Summe

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T_i(k)\, T_{n-i}(l),$$

die Werte aus (9) einsetzt. Bei diesem Beweise wird durch Anwendung von (8) implizite vorausgesetzt, daß die zu A_n reziproke Folge B_n besteht, daß also nach der ersten der Gleichungen (7) $A_0 \neq 0$ ist.

Zwischen Potenzfolgen $T_n(k)$ und Potenzen x^k besteht eine weitgehende Analogie. Der Formel $x^a x^b = x^{a+b}$ entspricht die Gleichung (12), und man kann leicht auch die den Formeln $x^a y^a = (xy)^a$, $(x^a)^b = x^{ab}$ entsprechenden Beziehungen zwischen Potenzfolgen ableiten.

Es sei bemerkt, daß (12) von großer Allgemeinheit ist, da über die Zahlen A^n (bis auf die Bedingung $A_0 \neq 0$) nichts vorausgesetzt wurde. Die Gleichung (12) ist (wie man zeigen kann) die Quelle zahlreicher Beziehungen zwischen *Bernoulli*'schen und *Euler*'schen Polynomen höherer Ordnung.

2.

Wir wollen zwei Sätze über reziproke Folgen beweisen, die in den nächsten Abschnitten zur Anwendung gelangen sollen.

Besteht zwischen zwei Folgen B_n und C_n die Beziehung:

$$(B+C)^1 = B_1 C_0 + 1, \tag{13}$$

$$(B+C)^n = B_n C_0 \quad \text{für} \quad n > 1, \tag{14}$$

so ist die Folge B_n zu der durch

$$A_i = \frac{1}{1+i} C_{i+1}, \qquad i \geqq 0, \tag{15}$$

gegebenen Folge A_n reziprok.

Aus (13) und aus $(B+C)^1 = B_1 C_0 + B_0 C_1$ folgt zunächst $B_0 C_1 = B_0 A_0 = 1$. Weiter folgt aus (14):

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} C_i = 0, \qquad n > 1,$$

und nach einfacher Umformung mit (15):

$$(B+A)^{n-1} = 0, \qquad n > 1,$$

womit die Reziprozität der Folgen A_n und B_n nach (7) erwiesen erscheint. Es gilt auch die Umkehrung obigen Satzes: Sind die Folgen A_n, B_n reziprok, also die Gleichungen

$$A_0 B_0 = 1, \quad (A+B)^n = 0, \qquad n > 0,$$

erfüllt, so liefert die Substitution (15) die Beziehungen (13) und (14). Man bemerke, daß bei dieser Umkehrung und Anwendung von (15) zur Bestimmung der Folge C_n die Zahl C_0 durch (15) nicht bestimmt wird und daß in diesem Falle in (13) und (14) das C_0 als willkürliche Konstante auftritt.

Der zweite der über reziproke Folgen zu beweisenden Sätze lautet:

Bestehen zwischen B_n, C_n, D_n für alle $n \geqq 0$ die Gleichungen:

$$(B+C)^n = D_n, \tag{16}$$

und sind die Folgen A_n, B_n reziprok, so bestehen für alle $n \geqq 0$ auch die Gleichungen:

$$C_n = (D+A)^n. \tag{17}$$

Nach (16) sind die Folgen $(B+C)^n$ und D_n identisch. Multipliziert man die durch jede der beiden Seiten von (16) dargestellte Folge mit der Folge A_n, so erhält man einerseits die Folge $(A+B+C)^n$ und andererseits die Folge $(A+D)^n$. Nun ist nach (5):

$$(A + B + C)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (A + B)^i C_{n-i},$$

und die rechts stehende Summe ergibt nach (7) nur für $i = 0$ einen von Null verschiedenen Summanden, womit (17) bewiesen erscheint [1]).

3.

Eine ganze rationale Funktion $f(x)$, welche der Differenzengleichung:

$$f(x + 1) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

genügen soll, ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und vom Grade $n + 1$.

Es sei eine Folge A_n mit $A_0 = 1$ gegeben. Wir definieren eine ganze rationale Funktion $T_n(x)$ durch Zahlen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ und Funktionen $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_{n-1}(x)$ mit Hilfe der Differenzengleichung:

$$T_n(x + 1) - T_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} T_i(x)\, A_{n-i}, \qquad n > 0, \tag{18}$$

und der Anfangsbedingungen:

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(0) = 0 \quad \text{für} \quad n > 0. \tag{19}$$

Nach obiger Bemerkung ist $T_n(x)$ vom Grade n, wenn die rechte Seite von (18) eine Funktion vom Grade $n - 1$ ist. Aus (18) und (19) folgt aber für $n = 1$ eindeutig: $T_1(x) = A_1 x$. Durch vollständige Induktion ergibt sich also, daß $T_n(x)$ vom Grade n ist.

Da $A_0 = 1$ angenommen wurde, kann (18) in der übersichtlicheren Form geschrieben werden:

$$T_n(x + 1) = (T(x) + A)^n \quad \text{für} \quad n \geqq 0. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt für $x = 0$ der Wert $T_n(1) = A_n$ für $n \geqq 0$, und man erhält durch den Schluß der vollständigen Induktion:

$$\begin{aligned} &T_n(1) = A_n, \quad T_n(2) = (A + A)^n, \ldots \\ &T_n(k) = \underbrace{(A + A + \cdots + A)}_{(k)}{}^n, \qquad n \geqq 0, \end{aligned} \tag{21}$$

für alle ganzzahligen, positiven Werte von k.

Ist B_n die zu A_n reziproke Folge, so kann in Anwendung des unter (16) und (17) über reziproke Folgen bewiesenen Satzes aus (20) geschlossen werden:

$$T_n(x) = (T(x + 1) + B)^n, \qquad n \geqq 0. \tag{22}$$

Für $x = -1$ folgt aus (22) und (19): $T_n(-1) = B_n$. Mit dieser Kenntnis ergibt (22) für $x = -2$ den Wert $T_n(-2) = (B + B)^n$ und wieder durch den Schluß von einem ganzzahligen $(-k)$ auf $(-k-1)$ allgemein:

$$T_n(-k) = \underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k)}{}^n, \qquad n \geqq 0, \tag{23}$$

für alle ganzzahligen, positiven Werte von k.

---

[1]) Setzt man $A_n = 1$, $B_n = (-1)^n$, so ist (7) erfüllt, also die Folgen A_n, B_n reziprok und aus obigem Satz folgt: Bestehen die Gleichungen $(C - 1)^n = D_n$ für $n \geqq 0$, so bestehen gleichzeitig auch die Gleichungen $C_n = (D + 1)^n$ für $n \geqq 0$. Das sind bekannte Formeln der Differenzenrechnung, die hier als Spezialfälle obigen Satzes erscheinen:

$$C_n = U_n. \quad D_n = \Delta^n U_0, \quad (U - 1)^n = \Delta^n U_0, \quad U_n = (\Delta + 1)^n U_0.$$

Definiert man ferner eine ganze, rationale Funktion $U_n(x)$ durch die Differenzengleichung und die Anfangsbedingungen:

$$U_n(x+1) - U_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} U_i(x) B_{n-i}, \quad n > 0, \tag{24}$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_n(0) = 0 \quad \text{für} \quad n > 0, \quad B_0 = 1,$$

so kann in der gleichen Weise gezeigt werden, daß $U_n(x)$ vom Grade n ist und dass für alle ganzzahligen Werte von x die Gleichungen erfüllt sind:

$$U_n(k) = \underbrace{(B + B + \cdots + B)^n}_{(k)}, \quad U_n(-k) = \underbrace{(A + A + \cdots + A)^n}_{(k)}, \tag{25}$$

Die aus (21), (23) und (25) sich ergebenden Gleichungen

$$T_n(k) = U_n(-k), \quad T_n(-k) = U_n(k), \qquad n \geqq 0,$$

können aber, da $T_n(x)$ und $U_n(x)$ beide vom Grade n sind, für *alle* ganzzahligen k nur bestehen, wenn $U_n(x)$ und $T_n(-x)$ identisch gleich sind. Im Zusammenhang mit der unter (6), (8), (9) für die Potenz einer Folge aufgestellten Definition ergeben diese Ausführungen den

Satz: Zu jeder Folge $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, die der Bedingung $A_0 = 1$ genügt, existiert eine Folge ganzer rationaler Funktionon $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x), \ldots$, welche die folgenden Eigenschaften haben: 1. *$T_n(x)$ ist vom Grade n und genügt der Differenzengleichung* (18). 2. *An der Stelle $x = 0$ verschwinden alle $T_n(x)$ bis auf $T_0(x) = 1$.* 3. *Für alle ganzzahligen $x = \pm k$ sind die Funktionswerte*

$$T_0(\pm k), \quad T_1(\pm k), \ldots, \quad T_n(\pm k), \ldots$$

mit der $(\pm k)$ten Potenzfolge der Folge A_n identisch. 4. *Sind A_n, B_n zwei reziproke Folgen, so besteht zwischen den diesen Folgen zugeordneten Funktionenfolgen $T_n(x)$ und $U_n(x)$ die Beziehung $T_n(x) = U_n(-x)$.*

Die einer Folge A_n im vorstehenden Satz eindeutig zugeordneten Polynome $T_n(x)$ *mögen* kurz *die A_n-Polynome heißen.*

Wir haben unter (6), (8), (9) die k-te Potenzfolge von A_n für ein ganzzahliges k definiert. *Jetzt können wir* ergänzend *für jedes reelle x die x-te Potenzfolge einer Folge A_n (mit $A_0 = 1$) durch die Folge $T_n(x)$ definieren.*

Für die Funktionen $T_n(x)$ gilt das Additionstheorem:

$$T_n(x+y) = (T(x) + T(y))^n. \tag{26}$$

Beweis: Nach (12) und nach der in obigem Satz unter 3. angeführten Eigenschaft der Funktionen $T_n(x)$ ist (26) für alle ganzzahligen x und y erfüllt. Ordnet man (26) nach Potenzen von x:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(y)\, x^i = \sum_{i=0}^{n} g_i(y)\, x^i, \tag{27}$$

und bedeutet hier y eine feste, ganze Zahl, so kann (27) für *alle* ganzzahligen x nur erfüllt sein, wenn für das gewählte y die Gleichungen bestehen:

$$f_i(y) = g_i(y), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Es ist also (27) auch für alle reellen Werte von x richtig. Wiederholt man diese Schlußweise für $n+1$ verschiedene ganze Zahlen y, so müssen die Gleichungen (28) für alle diese $(n+1)$ Werte von y erfüllt sein und dies ist (die $f_i(y), g_i(y)$ sind ganze, rationale Funktionen von y, deren Grad n nicht übersteigt) nur so möglich, daß die Gleichungen

(28) Identitäten in y darstellen, also auch für alle reellen Werte von y erfüllt sind. Hierdurch ist die Gleichung (26) für alle reellen Werte von x und y bewiesen.

Aus (26) ergibt sich leicht das *Multiplikationstheorem der Funktionen* $T_n(x)$:

$$T_n(kx) = \underbrace{(T(x) + T(x) + \cdots + T(x))^n}_{(k)}, \tag{29}$$

das für jedes reelle x und jedes ganzzahlige, positive k giltig ist.

4.

Die *Bernoulli*schen Zahlen genügen der bekannten Rekursionsformel:

$$(B+1)^1 = B_1 + 1, \quad (B+1)^n = B_n \quad \text{für} \quad n > 1. \tag{30}$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt wegen $(B+1)^1 = B_1 1^0 + B_0 1$ den Wert $B_0 = 1$. Die weiteren Werte sind bekanntlich

$$B_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \ldots$$

Der erste Satz des 2. Abschnittes gestattet, die zu den *Bernoulli*schen Zahlen reziproke Folge zu finden. Setzt man in (13), (14) und (15): $C_n = 1$, so gehen die Gleichungen (13) und (14) in (30) über, und aus (15) ergibt sich der Wert:

$$A_n = \frac{1}{n+1}, \quad n \geqq 0. \tag{31}$$

Aus dem ersten Satz des 2. Abschnittes folgt also:

Die Folge der Bernoullischen Zahlen und die Folge der reziproken Werte natürlicher Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ *sind reziproke Folgen*:

$$A_0 B_0 = 1, \quad (A+B)^n = 0 \quad \text{für } n > 0. \tag{32}$$

Die Folge (31) möge (analog zur harmonischen Reihe) als Folge der *harmonischen Zahlen* bezeichnet werden. Wir vermerken weiter:

Für die harmonischen Zahlen $A_n = \dfrac{1}{n+1}$ *gilt die Relation*:

$$(A-1)^n = (-1)^n A_n, \qquad n \geqq 0. \tag{33}$$

Für die Bernoullischen Zahlen B_n *besteht die ähnliche Beziehung*:

$$(B+1)^n = (-1)^n B_n, \qquad n \geqq 0. \tag{34}$$

Die Gleichung (33) folgt aus der Identität:

$$(A-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_i (-1)^{n-i}$$

durch die Substitution:

$$\binom{n}{i} A_i = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{i+1}.$$

Die Gleichung (34) ist für $n = 0$ eine Identität und für $n = 1$ durch die Werte $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ verifiziert; für $n > 1$ ergibt sich (34) aus der zweiten der Gleichungen (30), wenn in der letztgenannten rechts B_n durch $(-1)^n B_n$ ersetzt wird (was für $n > 1$ wegen $B_{2n-1} = 0$ erlaubt ist).

Es sei bemerkt, daß (33) und (34) keine Rekursionsformeln darstellen, da man denselben (wie die Rechnung zeigt) die Werte der A_n und B_n für $n > 1$ nicht entnehmen kann. Trotzdem sind, wie wir sehen werden, die Gleichungen (33) und (34) recht gut anwendbar, und die Anwendung von (34) ist oft bequemer als die von (30), da (34), — im Gegensatz zu (30) — auch für $n = 1$ dieselbe Form beibehält. Die Gleichung (34) wird übrigens zur echten Rekursionsformel für die *Bernoulli*schen Zahlen, wenn derselben

$B_{2n-1} = 0$ (für $n > 1$) und $B_0 = 1$ hinzugefügt wird. Ebenso kann (33) zur Definitionsgleichung für verschiedenartige Zahlen A_n gemacht werden, wenn der Gleichung (33) eine Festsetzung über die A_{2n-1} oder über die A_{2n} hinzugefügt wird.

Man kann auch von den harmonischen Zahlen A_n ausgehen und auf folgendem Wege zu einer Definition der *Bernoulli*schen Zahlen und zu der Rekursionsformel (30) gelangen. Ist $A_n = \frac{1}{n+1}$, so besteht für *jede* Folge B_n die Identität:

$$(B + A)^n = \sum_{i=0}^{n}{}' \binom{n}{i} B_{n-i} \frac{1}{i+1}, \qquad n \geqq 0.$$

Eine geringe Umformung der rechten Seite ergibt (für *jede* Folge B_n):

$$(30\,a) \qquad (B + A)^n = \frac{1}{n+1}((B+1)^{n+1} - B_{n+1}), \qquad n \geqq 0.$$

Definiert man jetzt die Zahlen B_n als die zu A_n reziproke Folge durch die Gleichungen $A_0 B_0 = 1$, $(A + B)^n = 0$ für $n > 0$, so wird die linke Seite von (30 a) gleich 1 für $n = 0$ und gleich 0 für $n > 0$. Es geht also (30 a) in (30) über. So führen die harmonischen Zahlen und der Reziprozitätsbegriff zweier Folgen rein arithmetisch zu den *Bernoulli*schen Zahlen.

5.

Wir verstehen von jetzt an (wenn nichts bemerkt wird) unter A_n die Zahlen $\frac{1}{n+1}$, unter $T_n(x)$ die A_n-Polynome (erster Satz des 3. Abschnittes), unter B_n die Bernoullischen Zahlen und unter $U_n(x)$ die B_n-Polynome.

Ersetzt man in (18) die A_n durch $\frac{1}{n+1}$, so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = \tfrac{1}{2}x, \quad T_2(x) = \tfrac{1}{4}x(x + \tfrac{1}{3}), \\ &T_3(x) = \tfrac{1}{8}x^2(x+1), \quad T_4(x) = \tfrac{1}{16}x(x^3 + 2x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{15}), \\ &T_5(x) = \tfrac{1}{32}x^2(x+1)(x^2 + \tfrac{7}{3}x - \tfrac{2}{3}). \end{aligned} \qquad (35)$$

Der im 3. Abschnitt bewiesene Satz, betreffend Eigenschaften der einer beliebigen Zahlenfolge A_n zugeordneten Funktionen $T_n(x)$, ergibt die folgenden Beziehungen zwischen den Funktionen (35), den harmonischen Zahlen A_n und den *Bernoulli*schen Zahlen B_n:

$$(36) \qquad T_n(1) = A_n = \frac{1}{n+1}, \qquad T_n(k) = \underbrace{(A + A + \cdots + A)}_{(k)}{}^n$$

$$(37) \qquad T_n(-1) = B_n \qquad\qquad T_n(-k) = \underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k)}{}^n,$$

$$n \geqq 0, \qquad k > 0.$$

Die Funktionen (35) erhielt *Frobenius* auf einem anderen Wege mit Hilfe gewisser Determinanten[1]).

[1]) Der Beweisgang von *Frobenius* ist der folgende: *Frobenius* bezeichnet gewisse mit Bernoullischen Zahlen zusammenhängende Polynome als „Eulersche Polynome“ (l. c. Seite 826). Die Eigenschaften dieser Polynome führen zu Determinanten (Seite 835), durch welche *Frobenius* obige Funktionen (35) definiert. Dann wird zunächst die wichtige Beziehung $T_n(-1) = B_n$ bewiesen und schließlich zum Beweis der anderen Formeln (37) übergegangen. In unserer Darstellung (3. Abschnitt) bezieht sich der Existenzbeweis für die Funktionen $T_n(x)$ auf beliebige reziproke Folgen A_n, B_n. Es entfällt daher hier die Notwendigkeit, die Gleichungen (37) besonders zu beweisen, da sich alle diese Gleichungen gleichzeitig aus einer gemeinsamen Quelle — aus dem Existenzbeweis für die Funktionen $T_n(x)$, die man einer beliebigen Zahlenfolge A_n zuordnen kann (3. Abschnitt) — ergeben. Die Gleichung $T_n(-1) = B_n$ ist hier nicht auf die Bernoullischen Zahlen allein beschränkt, sondern auch für jede zu der Ausgangsfolge A_n reziproke Folge B_n richtig.

Ersetzt man in (24) die B_n durch die Werte *Bernoulli*scher Zahlen, so erhält man:

$$(38)\qquad \begin{aligned} &U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = -\tfrac{1}{2}x, \quad U_2(x) = \tfrac{1}{4}x(x-\tfrac{1}{3}),\\ &U_3(x) = \tfrac{1}{8}x^2(1-x), \quad U_4(x) = \tfrac{1}{16}x(x^3 - 2x^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{15}). \end{aligned}$$

Zwischen den Funktionen (35) und (38) besteht die Beziehung:

$$(39)\qquad T_n(-x) = U_n(x),$$

wie nach dem Satz des 3. Abschnittes (Eigenschaft 4) zu erwarten war [1]).

Für ganzzahlige, positive x haben die Funktionen (35) eine einfache Bedeutung, die man, wie folgt, erkennt. Nach (36) ist:

$$(40)\qquad T_n(k) = \sum \frac{n!}{i_1! \cdots i_k!} A_{i_1} \cdots A_{i_k} = \sum \frac{n!}{(1+i_1)! \cdots (1+i_k)!},$$

wobei die Summe über die ganzzahligen, *nichtnegativen* $i_1, i_2, \ldots, i_k$, die der Bedingung $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$ genügen, zu erstrecken ist. Andererseits ist, wenn die Anfangsglieder der Differenzenreihen der Folge $0^m, 1^m, 2^m, 3^m, \ldots$, wie üblich, mit $\Delta 0^m$, $\Delta^2 0^m$, $\Delta^3 0^m, \ldots$ bezeichnet werden:

$$(41)\qquad \Delta^k 0^m = \sum \frac{m!}{r_1! \cdots r_k!},$$

und diese Summe ist über alle ganzzahligen, *positiven* Werte der $r_1, r_2, \ldots, r_k$, die der Bedingung $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = m$ genügen, zu erstrecken. Für $m = n + k$ folgt aus (40) und (41):

$$(42)\qquad T_n(k) = \frac{n!}{(k+n)!}\, \Delta^k 0^{k+n}, \qquad k > 0.$$

Dies [2]) ist die Bedeutung der Funktionen (35) für ganzzahlige, positive k.

Die Formel:

$$\Delta^p 0^q = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-1)^i (p-i)^q$$

führt leicht zu der Beziehung:

$$\Delta^p 0^{q+1} = p(\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q).$$

Setzt man hier $p = x$, $q + 1 = x + n$, so erhält man in Verbindung mit (42) zunächst für ganzzahlige, positive x:

$$(43)\qquad (x+n)\, T_n(x) - x\, T_n(x-1) = n x\, T_{n-1}(x).$$

Diese Gleichung kann, da $T_n(x)$ eine ganze Funktion vom Grade n ist, für alle ganzzahligen, positiven x nur dann richtig sein, wenn die Koeffizienten gleicher Potenzen von

---

[1]) *N. E. Nörlund* (Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Kapitel VI) hat bei seinen ergebnisreichen Untersuchungen über höhere Eulersche und Bernoullische Polynome als Koeffizienten derselben Zahlen erhalten, die er mit $B_n^{(k)}$ bezeichnet. Zwischen den Zahlen $B_n^{(k)}$ von *Nörlund* und obiger Funktion $U_n(x)$ besteht der Zusammenhang: $U_n(k) = B_n^{(k)}$. Die Formeln *Nörlunds* für die Zahlen $B_n^{(k)}$ beziehen sich auf ganzzahlige Werte von k. Die Bernoullischen Polynome *Nörlunds* (bei „gleichen Spannen") können im Sinne unserer Definitionen (1. Abschnitt) als Produkte der Folge $U_n(k)$ und der Folge $1, x, x^2, x^3, \ldots$ dargestellt werden. Man kann auf diesem Wege Verallgemeinerungen höherer Bernoullischer Polynome erhalten, da die ganze Zahl k in unserer Darstellung durch eine reelle Variable ersetzt werden kann. Auf die Möglichkeit solcher Verallgemeinerungen hat *Nörlund* auch hingewiesen, und zwar unter Benutzung der Funktion e^x.

[2]) Durch (42) definiert *Frobenius* $T_n(x)$ für ganze, positive x. Der hier folgende Beweis der Gleichung (43) ist (bis auf die verschiedene Definition von $T_n(x)$) dem von Frobenius für (43) gegebenen Beweise nachgebildet (l. c., Seite 836).

x auf beiden Seiten übereinstimmen. Daher ist (43) auch für alle reellen Werte von x richtig. Aus (39) und (43) folgt die entsprechende Gleichung für die Funktionen (38):

$$(44) \qquad (x-n)\,U_n(x) - x\,U_n(x+1) = n\,x\,U_{n-1}(x).$$

Aus (43) oder (44) können Beziehungen zwischen *Bernoulli*schen Zahlen abgeleitet werden, wie z. B. aus (44) für $x = 1$:

$$(B+B)^n = (1-n)\,B_n - n\,B_{n-1},$$

die sonst nur durch Grenzübergänge (Differentialquotienten) gewonnen werden.

6.

Wir benützen in diesem Abschnitt zwei elegante Substitutionen von *Frobenius*. Führt man in (43):

$$(45\,a) \qquad \binom{x+n}{n} T_n(x) = G_n(x), \qquad n \geqq 0,$$

ein, so ergibt sich:

$$(45\,b) \qquad G_n(x) = G_n(x-1) + x\,G_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1.$$

Nach (45 a) ist $G_n(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $2n$, und aus (45 b) kann die folgende Bedeutung von $G_n(x)$ abgelesen werden:

$G_n(x)$ ist für ganze, positive x die Summe der Produkte von je n *gleichen oder verschiedenen* der Zahlen $1, 2, \ldots, x$.

Setzt man noch:

$$(46) \qquad F_n(x) = G_n(-x) = (-1)^n \binom{x-1}{n} T_n(-x), \qquad n \geqq 0,$$

und führt sodann

$$F_n(x) = (-1)^n \binom{x-1}{n} U_n(x)$$

in (44) ein, so ergibt sich:

$$(47) \qquad F_n(x+1) = F_n(x) + x\,F_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1.$$

Dieselbe Gleichung erhält man, wenn in (45 b) x durch $-x$ ersetzt und dann $F_n(x)$ anstatt $G_n(-x)$ geschrieben wird. Aus (47) kann die folgende Bedeutung von $F_n(x)$ abgelesen werden: $F_n(x)$ ist für ganze, positive x, die $\geqq n$ sind, die Summe der Produkte von je n *verschiedenen* der Zahlen [1]): $0, 1, 2, 3, \ldots, x-1$. Die Werte von $F_n(x)$ und $G_n(x)$ sind nach (36) und (37) für alle ganzzahligen x bekannt. Wir erhalten so den von *Frobenius* bewiesenen Satz (mit einer kleinen Ergänzung):

Es gibt eine durch x teilbare ganze Funktion n-ten Grades $T_n(x)$, welche folgende Eigenschaften hat:

Das Produkt

$$\binom{x+n}{n} T_n(x) = F_n(-x), \qquad n \geqq 1,$$

ist für ganzzahlige, positive x gleich der Summe der Produkte von je n gleichen oder verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, x$. Die Funktion $T_n(x)$ hat für ganzzahlige, positive x die folgenden Werte:

---

[1]) Wir schreiben hier $0, 1, 2, \ldots, x-1$, anstatt $1, 2, \ldots, x-1$, wodurch die Funktion $F_n(x)$ auch für $x = 1$, $n = 1$ die gleiche Bedeutung beibehält. Weiter sei bemerkt, daß nach (35) und (46) $F_0(x) = 1$ und $F_1(0) = 0$ zu setzen ist. Die Differenzengleichung (47) lautet daher für $n = 1$:

$$F_1(x+1) = F_1(x) + x,$$

und als Anfangsbedingung ist $F_1(0) = 0$ anzunehmen.

$$T_n(1) = A_n = \frac{1}{n+1}, \qquad T_n(2) = (A+A)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_i A_{n-i},$$
$$T_n(k) = \underbrace{(A + A + \cdots + A)}_{(k)}{}^n, \qquad n \geqq 0.$$

Das Produkt

$$(-1)^n \binom{x-1}{n} T_n(-x) = F_n(x), \qquad n \geqq 1,$$

ist für ganzzahlige, positive x, die $\geqq n$ sind, gleich der Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, x-1$. Für $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, wo das letztgenannte Produkt verschwindet, und auch für alle anderen ganzzahligen, positiven x hat $T_n(-x)$ die Werte:

$$T_n(-1) = B_n, \qquad T_n(-2) = (B+B)^n,$$
$$T_n(-k) = \underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k)}{}^n, \qquad n \geqq 0.$$

Die Funktion $T_n(x)$ ist durch die Zahlen $A_n = \frac{1}{n+1}$ und die Differenzengleichung (18) *in Verbindung mit den Anfangsbedingungen* (19) *eindeutig bestimmt.*

Aus diesem Satz folgt für $x = k$ die von *Frobenius* angeführte bemerkenswerte Formel:

$$(48) \qquad (y-1)(y-2)\cdots(y-k+1) = (y + T(-k))^{k-1},$$

in welcher die Koeffizienten von y als ganze rationale Funktionen von k erscheinen.

Anstatt die $T_n(x)$ auf Grund von (18) zu bestimmen, kann man auch direkt die $F_n(x)$, und zwar auf Grund der Differenzengleichung (47), berechnen. Man bemerke, daß die bekannte Formel

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{x-1} k^n = \frac{(B+x)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1}$$

in der symbolischen Form

$$(49\,a) \qquad S_n(x) = \int_B^{x+B} x^n \, dx,$$

geschrieben werden darf. Die Lösung der Differenzengleichung

$$f(x+1) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ lautet demgemäß:

$$f(x) = \int_B^{x+B} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, dx.$$

Nach (46) ist $F_n(0) = T_n(0)$, und nach dem im 3. Abschnitt bewiesenen Existenzsatz (Eigenschaft 2) ist $T_n(0) = 0$ für $n > 0$. Die Lösung der Differenzengleichung (47) hat also die Anfangsbedingung $F_n(0) = 0$ für $n > 0$ zu erfüllen und lautet nach Obigem:

$$F_n(x) = \int_B^{x+B} x F_{n-1}(x) \, dx, \qquad n \geqq 1.$$

Nach (35) und (46) ist aber $F_0(x) = 1$, also:

$$F_1(x) = \int_B^{x+B} x\,dx = \frac{1}{2}\,x(x-1).$$

Man erhält so für $F_n(x)$ das n-fache Integral:

$$F_n(x) = \int_B^{x+B} x\,dx \int_B^{x+B} x\,dx \ldots \int_B^{x+B} x\,dx. \tag{49 b}$$

Analog zur Formel (49 a) *für die Summe der n-ten Potenzen der Zahlen* $0, 1, 2, \ldots, x-1$ *ergibt* (49 b) *die Summe der Produkte von je n verschiedenen dieser Zahlen. Als Funktion von x aufgefaßt, ist* $S_n(x)$ *die bekannte Bernoullische Funktion und* $F_n(x)$ *ein Analogon derselben für symmetrische Grundfunktionen natürlicher Zahlen.*

7.

Nach dem im 3. Abschnitt bewiesenen Satz gehört zu jeder Zahlenfolge A_n (in welcher $A_0 = 1$ ist) eindeutig eine Folge ganzer, rationaler Funktionen $T_n(x)$.

Die den harmonischen Zahlen zugeordneten Funktionen $T_n(x)$ *genügen den folgenden drei Formeln:*

$$(T(x)+1)^n - T_n(x) = n\,T_{n-1}(x+1), \qquad n \geqq 1. \tag{50 a}$$

$$(x - T(x))^n = T_n(x), \qquad n \geqq 0. \tag{50 b}$$

$$(T(x) + T(y))^n = T_n(x+y). \qquad n \geqq 0. \tag{50 c}$$

Diese Beziehungen hat *Frobenius* auf Grund gewisser Eigenschaften der von ihm eingeführten „*Euler*schen Polynome" abgeleitet [1]). Er benützt hierbei eine besondere Methode, durch welche symbolische Differenzengleichungen in wirkliche verwandelt werden. Wir zeigen im folgenden, daß man diese drei Formeln auch direkt aus der Definitionsgleichung (30) der *Bernoulli*schen Zahlen unter Heranziehung der einfachen Formel (33) auf kurzem Wege ableiten kann.

Beweis von (50 a): Nach (37) und (39) ist für ein ganzzahliges, positives k:

$$(U(k)+1)^n = (\underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k-1)} + (B+1))^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k-1)}^{n-i} (B+1)^i.$$

Nach (30) kann man rechts $(B+1)^i$ für $i \neq 1$ durch B^i, hingegen $(B+1)^1$ durch $B_1 + 1$ ersetzen und erhält:

$$(U(k)+1)^n = U_n(k) + n\,U_{n-1}(k-1), \qquad n \geqq 1.$$

Diese für alle ganzzahligen, positiven k richtige Gleichung bleibt offenbar bestehen, wenn k durch eine Variable x ersetzt wird, da ja $U_n(x)$ eine ganze rationale Funktion ist. Die so entstehende Identität in x:

$$(U(x)+1)^n = U_n(x) + n\,U_{n-1}(x-1), \qquad n \geqq 1, \tag{51 a}$$

ergibt in Verbindung mit $U_n(x) = T_n(-x)$ die Formel (50 a).

Beweis von (50 b): Aus der Giltigkeit des assoziativen und kommutativen Gesetzes (4), (5), folgt die Identität:

---

[1]) *Frobenius* l. c., Seite 826, 828, 838.

$$(\underbrace{A + A + \cdots + A}_{(k)} - k)^n = \big((A-1) + (A-1) + \cdots + (A-1)\big)^n$$

Wendet man auf die linke Seite dieser Gleichung die Formel (36) und auf die rechte Seite die Formel (33) an, so erhält man:

$$(T(k) - k)^n = (\underbrace{-A - A - \cdots - A}_{(k)})^n,$$

also (nach der gleichen Schlußweise wie oben) auch für alle x:

$$(T(x) - x)^n = (-1)^n T_n(x), \qquad n \geqq 0,$$

womit (50 b) bewiesen ist. Ebenso einfach ist der Beweis unter Heranziehung der Formel (34): Die Identität

$$(\underbrace{B + B + \cdots + B}_{(k)} + k)^n = ((B+1) + (B+1) + \cdots + (B+1))^n$$

ergibt durch Anwendung der Formel (37) für die linke und (34) für die rechte Seite:

$$(U(k) + k)^n = (-B - B - \cdots - B)^n = (-1)^n U_n(k),$$

also auch für alle x

(51 b) $$(U(x) + x)^n = (-1)^n U_n(x), \qquad n \geqq 0,$$

wodurch (50 b) nochmals bewiesen ist.

Die Gleichung (50 b) kann man leicht verallgemeinern. Wird in der Identität

$$(T(x) + y)^n = (T(x) - x + x + y)^n$$

die rechte Seite unter Anwendung von (50 b) umgeformt:

$$(T(x) - x + x + y)^n = (-T(x) + x + y)^n,$$

so erhält man als Verallgemeinerung von (50 b):

(52) $$(T(x) + y)^n = (-T(x) + x + y)^n, \qquad n \geqq 0.$$

Für $y = -\frac{x}{2}$ folgt aus (52):

(53) $$\Big(T(x) - \frac{x}{2}\Big)^{2n+1} = 0, \qquad n \geqq 0.$$

Die Beziehung (53) ist eine Verallgemeinerung der für die *Bernoulli*schen Zahlen bestehenden Relation:

$$\Big(B + \frac{1}{2}\Big)^{2n+1} = 0, \qquad n \geqq 0$$

und liefert die letztere für $x = -1$.

Die Formel (50 c) ist mit (26) identisch, wodurch sich ein besonderer Beweis für (50 c) erübrigt.

Im Anschluß an obigen Beweis der drei Formeln (50) kann leicht gezeigt werden, daß die Formeln (50 b) und (50 c) nicht nur für die den Zahlen $A_n = \frac{1}{n+1}$ zugeordneten Funktionen (35), sondern auch für andere Funktionenfolgen $T_n(x)$ giltig sind. Beim Beweis von (50 b) haben wir die Formeln (36), (37), (33), (34) angewendet. Die Beziehungen (36) und (37) sind aber nach (21) und (23) für zwei beliebige reziproke Folgen A_n und B_n erfüllt; bezüglich der Formeln (33) und (34) ist zu bemerken, daß durch dieselben die Zahlen A_n und B_n keineswegs eindeutig bestimmt sind. Die Beziehung

(33) ist nicht nur für die harmonischen Zahlen $A_n = \frac{1}{n+1}$, sondern auch für andere Folgen, wie z. B. für $A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ erfüllt; ebenso genügen der Beziehung (34) nicht nur die *Bernoulli*schen Zahlen B_n, sondern auch die Zahlen $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ und andere Folgen. Zu jeder Folge A_n gehört aber nach dem im 3. Abschnitt aufgestellten Satz eindeutig eine Funktionenfolge $T_n(x)$; erfüllt nun eine Folge A_n die Beziehung (33), so genügt die zugeordnete Funktionenfolge $T_n(x)$ den Relationen (50 b), (52) und (53). Diese Relationen sind z. B. auch durch $T_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ erfüllt, und das ist auch die der Zahlenfolge $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ zugeordnete Funktionenfolge. Einen noch größeren Geltungsbereich besitzt die Formel (50 c); dieselbe gilt nach (26) für jede Funktionenfolge $T_n(x)$, die man einer (bis auf $A_0 = 1$) beliebigen Zahlenfolge A_n durch (18) und (19) eindeutig zuordnen kann. Wir erhalten daher die folgende Verallgemeinerung der Formeln (50 b) und (50 c):

Ist A_n eine (bis auf $A_0 = 1$) beliebige Zahlenfolge und $T_n(x)$ die derselben durch die Differenzengleichung (20):

$$T_n(x+1) = (T(x) + A)^n, \qquad n \geqq 0,$$
$$T_0(x) = 1, \quad T_n(0) = 0 \quad \text{für} \quad n > 0,$$

eindeutig zugeordnete Funktionenfolge, so gilt für die Funktionen $T_n(x)$ die Formel (50 c):

(I) $$(T(x) + T(y))^n = T_n(x+y), \quad n \geqq 0.$$

Erfüllt die Folge A_n die Relation (33):

$$(A-1)^n = (-1)^n A_n, \qquad n \geqq 0,$$

so gelten für die eindeutig zugeordnete Funktionenfolge $T_n(x)$ nebst (I) *auch die Formeln* (50 b) *und* (52):

(II) $$(T(x) - x)^n = (-1)^n T_n(x), \qquad n \geqq 0.$$

(III) $$(T(x) + y)^n = (-T(x) + x + y)^n, \quad n \geqq 0.$$

Für die der Zahlenfolge $A_n = \frac{1}{n+1}$ eindeutig zugeordnete Funktionenfolge $T_n(x)$ gelten die Formeln (I), (II), (III) *und die Beziehung* (50 a):

(IV) $$(T(x) + 1)^n - T_n(x) = n\, T_{n-1}(x+1), \quad n \geqq 1.$$

Die Gleichung (IV) kann auch als Ausgangspunkt der Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen dienen. Sie ergibt für $x = -1$ die Definitionsgleichung (30) der *Bernoulli*schen Zahlen und für $x = 0$ die harmonischen Zahlen $T_{n-1}(1) = \frac{1}{n} = A_{n-1}$.

8.

Die Untersuchung symmetrischer Grundfunktionen natürlicher Zahlen ist durch den im 6. Abschnitt angeführten Satz auf die Untersuchung jener Funktionen $T_n(x)$ zurückgeführt, die den harmonischen Zahlen $A_n = \frac{1}{n+1}$ eindeutig zugeordnet sind. Es soll nunmehr versucht werden, einen Einblick in die Natur der Koeffizienten dieser $T_n(x)$ zu erhalten. Setzt man

(54) $$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n^{(i)} x^i, \qquad n \geqq 0,$$

so ist nach dem im 3. Abschnitt bewiesenen Satz (Eigenschaft 2)

$$a_n^{(0)} = 0 \quad \text{für} \quad n \geqq 1, \qquad a_0^{(0)} = 1. \tag{54 a}$$

Frobenius [1]) hat den Wert von $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$, den letzteren für ein ungerades n, bestimmt. Wir entwickeln im folgenden einige allgemeine Formeln für die $a_n^{(i)}$.

In der Gleichung (43):

$$(x+n)\,T_n(x) - x\,T_n(x-1) = n\,x\,T_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1,$$

ist für $n > 1$ die rechte Seite (nach 54 a) durch x^2 teilbar. Es muß daher der Koeffizient von x auf der linken Seite verschwinden. Dieser Koeffizient ist $n\,a_n^{(1)} - T_n(-1)$. Hieraus folgt $a_n^{(1)} = \dfrac{T_n(-1)}{n} = \dfrac{B_n}{n}$ für $n > 1$. Für $n = 1$ ist die rechte Seite von (43) gleich x, also $a_1^{(1)} - B_1 = 1$. Es ist daher

$$a_n^{(1)} = (-1)^n \frac{B_n}{n} \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Aus (43) folgt weiter durch Vergleich beiderseitiger Koeffizienten von x^i:

$$n\,a_n^{(i)} - n\,a_{n-1}^{(i-1)} = \sum_{s=i}^{n} (-1)^{s-i+1} \binom{s}{i-1} a_n^{(s)}, \tag{55}$$

$$i \geqq 1, \qquad n \geqq 1.$$

Hieraus erhält man für $i = n$ den Wert $a_n^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ und für $i = n-1$ eine Funktionalgleichung zur Bestimmung von $a_n^{(n-1)}$. Die Auflösung derselben lautet:

$$a_n^{(n-1)} = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} B_2.$$

Setzt man in (55) $i = n-2$, so erhält man unter Benützung der für $a_n^{(n)}$ und $a_n^{(n-1)}$ erhaltenen Ausdrücke eine weitere Funktionalgleichung zur Bestimmung von $a_n^{(n-2)}$. Die Auflösung dieser Funktionalgleichungen kann jedoch auf folgendem Wege umgangen werden. Aus (50 c) folgt für $y = -1$:

$$T_n(x-1) = (T(x) + B)^n = (T(x) - B)^n - n\,T_{n-1}(x).$$

Führt man diesen Ausdruck für $T_n(x-1)$ in (43) ein, so erhält man:

$$T_n(x) = \frac{x}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} T_s(x)\,(-B)^{n-s}, \qquad n \geqq 1, \tag{56}$$

und hieraus durch Vergleich beiderseitiger Koeffizienten von x^i:

$$a_n^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{s=i-1}^{n-1} \binom{n}{s} (-B)^{n-s}\, a_s^{(i-1)}, \tag{57}$$

$$i \geqq 1, \qquad n \geqq 1.$$

Während die Rekursionsformel (55) die $a_n^{(i)}$ in der Reihenfolge $a_n^{(n)}$, $a_n^{(n-1)}$, $a_n^{(n-2)}$, ... liefert, ergeben sich diese Koeffizienten aus (57) in der Ordnung $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, ... Für $i = 1$ erhält man aus (57) (unter Beachtung von (54 a)) nochmals den bereits oben bestimmten Wert von $a_n^{(1)}$ und für $i = 2$ den Ausdruck:

$$a_n^{(2)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} \frac{B_s}{s}\, B_{n-s}, \qquad n > 1.$$

---

[1]) l. c., Seite 836 und 837.

Durch Verbindung von (55) und (57) ergibt sich [1]) schließlich:

$$(58)\qquad (n-i)\,a_n^{(i)} = 2\sum_{s=i-1}^{n-2}\binom{n}{s} a_s^{(i-1)} B_{n-s} + \sum_{s=i+1}^{n}\binom{s}{i-1} a_n^{(s)} (-1)^{s-i},$$
$$n > i, \quad n \geqq 2, \quad i \geqq 1.$$

Diese Formel ergibt die $a_n^{(i)}$ in der Reihenfolge $a_n^{(n-1)}, a_n^{(n-2)}, \ldots$, und zwar direkt und nicht wie (55) in der Form einer Funktionalgleichung. Ferner gestattet (58), eine für zahlentheoretische Anwendungen (Abschnitt 10 u. f.) wesentliche Folgerung zu ziehen. Die Werte:

$$a_n^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = (-B_1)^n, \qquad a_n^{(n-1)} = \binom{n}{2}(-B_1)^{n-1} B_2,$$

legen die Vermutung nahe, daß im Ausdruck für $a_n^{(i)}$ die *Bernoulli*schen Zahlen B_k als höchsten Index k den Wert $n-i+1$ aufweisen oder diesen Wert zumindest nicht übersteigen. Diese Vermutung kann aus (58) durch vollständige Induktion, wie folgt, bestätigt werden. (Wir führen nachstehend den Schluß von $a_n^{(i+1)}$ auf $a_n^{(i)}$, und das ist hier dasselbe, wie der Schluß von $a_n^{(n-s)} = f(s)$ auf $a_n^{(n-s-1)} = f(s+1)$). In $a_n^{(i+1)}$ sei B_{n-i} die *Bernoulli*sche Zahl mit dem höchsten Index. Betrachtet man in (58) die rechts vorkommenden $a_p^{(q)}$, so hat die Differenz $p-q$ als größten Wert $n-i-1$. Die $a_p^{(q)}$ liefern daher nach obigem als *Bernoulli*sche Zahl mit dem höchsten Index die Zahl B_{n-i}. Die rechte Seite von (58) enthält ferner in der ersten der beiden Summen die *Bernoulli*schen Zahlen explizite, und zwar als Zahl mit dem höchstens Index die Zahl B_{n-i+1} mit dem nicht verschwindenden Koeffizienten $2\binom{n}{i-1}\frac{1}{2^{i-1}}$. Hierdurch ist bewiesen, daß die im Ausdruck für $a_n^{(i)}$ vorkommenden *Bernoulli*schen Zahlen B_k als höchsten Index k den Wert $n-i+1$ aufweisen. Nun folgt aus dem Satz von *Staudt-Clausen* und noch einfacher direkt aus der Definitionsgleichung (30), daß die im Nenner von B_k vorkommenden Primzahlen die Zahl $k+1$ nicht übersteigen. Da die im Nenner von $a_n^{(i)}$ vorkommenden Primzahlen nach obiger Überlegung nur den Nennern von $B_1, B_2, \ldots, B_{n-i+1}$ und dem (auf der linken Seite von (58) vorkommenden) Faktor $n-i$ entstammen können, so ergibt sich, daß die im Nenner von $a_n^{(i)}$ vorkommenden Primzahlen die Zahl $n-i+2$ jedenfalls nicht übersteigen. Wir werden hievon eine zahlentheoretische Anwendung machen und fassen die in diesem Abschnitt erhaltenen Resultate zusammen:

Für die Koeffizienten der (den harmonischen Zahlen zugeordneten) Funktion:

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_n^{(i)} x^i, \qquad n \geqq 1,$$

gelten die Rekursionsformeln (55), (57), (58) *und insbesondere die Werte:*

$$a_n^{(1)} = (-1)^n \frac{B_n}{n}, \qquad a_n^{(2)} = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\binom{n}{s}\frac{B_s}{s} B_{n-s},$$

$$(59)\qquad a_n^{(n)} = (-B_1)^n, \qquad a_n^{(n-1)} = \binom{n}{2}(-B_1)^{n-1} B_2,$$

$$a_n^{(n-2)} = \binom{n}{4}(-B_1)^{n-1} B_2 + \binom{n}{3}(-B_1)^{n-3} B_3.$$

Die im Nenner von $a_n^{(i)}$ vorkommenden Primzahlen p erfüllen die Ungleichung:

$$(60)\qquad p \leqq n - i + 2.$$

[1]) Man bilde (57) $\cdot\, 2n$ —(55) und beachte $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2n-1} = 0$ für $n > 1$.

9.

Formeln anderer Art für die Koeffizienten von $T_n(x)$ erhält man mit Hilfe der Differenzenrechnung. Wird die k-te Differenzenreihe der Folge $f(0), f(1), f(2), \ldots$ wie üblich mit $\Delta^k f(0), \Delta^k f(1), \ldots$ bezeichnet, so ist:

$$\Delta^k f(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i),$$

$$f(i) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \Delta^k f(0).$$

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade n, so kann die letzte Formel für alle Werte der Variablen x in der Form geschrieben werden (*Newton*sche Interpolationsformel):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \Delta^k f(0).$$

Die $T_n(x)$ und $U_n(x)$ sind ganze Funktionen n-ten Grades, welche nach (36), (37) und (39) für ganzzahlige x die Werte annehmen:

$$T_n(k) = U_n(-k) = (\underbrace{A + A + \cdots + A}_{(k)})^n, \qquad n \geqq 0, \quad k > 0.$$

$$T_n(-k) = U_n(k) = (\underbrace{B + B + \cdots + B}_{(k)})^n, \qquad n \geqq 0, \quad k > 0. \tag{61}$$

$$T_n(0) = U_n(0) = 0 \text{ für } n > 0, \qquad T_0(0) = U_0(0) = 1.$$

Ersetzt man daher in der *Newton*schen Formel $f(x)$ durch $T_n(x)$ oder $U_n(x)$, so ergibt sich für $n \geqq 1$:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{x}{i} \Delta^i T_n(0) = \sum_{i=1}^{n} a_n^{(i)} x^i,$$

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{x}{i} \Delta^i U_n(0) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_n^{(i)} x^i. \tag{62}$$

Die Gegenüberstellung der Formeln für $T_n(x)$ und $U_n(x)$ ermöglicht es in einfacher Weise, jeder Formel für die harmonischen Zahlen $A_n = \dfrac{1}{n+1}$ die entsprechende Beziehung für die *Bernoulli*schen Zahlen B_n zur Seite zu stellen. So ergibt sich aus (62) für $x = -1$ die folgende Darstellung für die Zahlen A_n und B_n:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Delta^i T_n(0), \quad A_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Delta^i U_n(0), \tag{63}$$

die wir später noch vereinfachen werden. ((69) und (70)).

Führt man in (62) die Beziehung (48) ein:

$$\binom{x}{k} = \frac{x}{k!} (x + T(-k))^{k-1}$$

und ordnet hierauf nach Potenzen von x, so erhält man als Ergänzung von (59) die folgenden zwei Formeln für die Koeffizienten $a_n^{(i)}$:

$$a_n^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k!} \Delta^k T_n(0) \binom{k-1}{i-1} T_{k-i}(-k),$$

$$(-1)^i a_n^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k!} \Delta^k U_n(0) \binom{k-1}{i-1} T_{k-i}(-k). \tag{64}$$

Für $i = n$ folgt aus (64) durch Vergleich mit (59):

$$\Delta^n T_n(0) = n!\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \Delta^n U_n(0) = n!\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n > 0,$$

und das heißt:

Die n-te Differenzenreihe der Folge

$$0, \quad A_n, \quad (A+A)^n, \quad (A+A+A)^n, \ldots \qquad (n>0)$$

ist konstant und gleich $n!\left(\frac{1}{2}\right)^n$. *Ebenso ist die n-te Differenzenreihe der Folge*

$$0, \quad B_n, \quad (B+B)^n, \quad (B+B+B)^n, \ldots \qquad (n>0)$$

konstant und gleich $n!\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Für $n = 0$ lauten beide Folgen: 1, 1, 1, ... (wegen $T_0(0) = U_0(0) = 1$), und obiger Satz gilt daher auch für $n = 0$. ($\Delta^0 T_0(0) = T_0(0)$).

Es sei gestattet, hier eine Bezeichnung einzuführen, welche die Werte $\Delta^k T_n(0)$ und $\Delta^k U_n(0)$ von einer besonderen Seite beleuchtet. Nach (2) ist in

$$\underbrace{(A+A+\cdots+A)}_{(k)}{}^n = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_k!} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$$

die Summe über alle ganzzahligen, *nichtnegativen* Werte von $i_1, i_2, \ldots, i_k$ zu erstrecken, die der Bedingung $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$ genügen. Es sei nun in der Definitionsgleichung:

$$(65) \qquad \underbrace{(A+A+\cdots+A)}_{(k)}{}^{[n]} = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_k!} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$$

die Summe über alle ganzzahligen, *positiven* Werte von $i_1, i_2, \ldots, i_k$ zu erstrecken, welche die Bedingung $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$ erfüllen. Aus dieser Definition folgt:

$$(66) \qquad \underbrace{(A+A+\cdots+A)}_{(k)}{}^{[n]} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n < k, \\ n!\, A_1^n & \text{für} \quad n = k. \end{cases}$$

Schreibt man nun

$$\Delta^k T_n(0) = T_n(k) - \binom{k}{1} T_n(k-1) + \cdots + (-1)^k T_n(0)$$

in der Form:

$$\Delta^k T_n(0) = \underbrace{(A+A+\cdots+A)}_{(k)}{}^n - \binom{k}{1} \underbrace{(A+A+\cdots+A)}_{(k-1)}{}^n + \cdots$$

und entwickelt die rechte Seite nach dem polynomischen Lehrsatz, so kann leicht gezeigt werden, daß schließlich rechts nur solche Glieder $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$ übrig bleiben, in welchen *alle* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ von Null verschieden sind [1]). Diese letztgenannten Glieder

---

[1]) Der Koeffizient des Gliedes

$$\frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_s!} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_s}, \qquad i_1 > 0, \cdots, i_s > 0,$$

ist gleich

$$\binom{k}{s} - \binom{k}{1}\binom{k-1}{s} + \binom{k}{2}\binom{k-2}{s} - \cdots + (-1)^{k-s}\binom{k}{k-s}\binom{s}{s}$$

und kann für $s < k$ leicht zu

$$\binom{k}{s}(1-1)^{k-s}$$

umgeformt werden. Dieser Koeffizient ist also gleich Null für $s < k$ und gleich 1 für $s = k$.

stammen alle vom ersten Polynom $\underbrace{(A + A + \cdots + A)}_{(k)}^{n}$, welches allein k der A enthält,

und es ist also nach (65):

$$\Delta^k T_n(0) = \underbrace{(A + A + \cdots + A)}_{(k)}^{[n]}. \tag{67}$$

In gleicher Weise erhält man:

$$\Delta^k U_n(0) = \underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k)}^{[n]}. \tag{68}$$

Dies ergibt in Verbindung mit (63) den Satz:

Für die Bernoullischen Zahlen B_n gilt die folgende independente Darstellung:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \underbrace{(A + A + \cdots + A)}_{(k)}^{[n]}, \qquad n \geqq 1. \tag{69}$$

Für die harmonischen Zahlen A_n gilt die analoge Beziehung:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \underbrace{(B + B + \cdots + B)}_{(k)}^{[n]}, \qquad n \geqq 1. \tag{70}$$

Hierbei bedeutet das Symbol $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^{[n]}$ die Summe derjenigen Glieder von $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$, in welchen alle $x_1, x_2, \ldots, x_k$ von Null verschiedene Exponenten besitzen.

Beispiel: $B_2 = -A_2 + (A + A)^{[2]} = -A_2 + 2A_1A_1 = \frac{1}{6}$,

$A_2 = -B_2 + (B + B)^{[2]} = -B_2 + 2B_1B_1 = \frac{1}{3}$.

Die Formel (69) ist vielleicht neu und bemerkenswert wegen der einfachen Natur der Zahlen $A_n = \frac{1}{n+1}$. Unter den bekannten independenten Darstellungen der *Bernoulli*schen Zahlen ist (69) der Formel:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \Delta^k 0^n$$

ähnlich [1]).

Es ist nunmehr möglich, die Formeln (64) weitgehend zu vereinfachen. Bezeichnet $F_n(k)$, wie im 6. Abschnitt, die Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, k-1$ (und wird $F_0(k) = 1$ gesetzt), so ist nach (46):

---

[1]) Wir stellen im folgenden einige der erhaltenen Summenformeln zusammen. Die erste derselben ist trivial und nur zu Vergleichszwecken aufgenommen; die zweite und dritte waren unter (40) und (41) angeführt; die vierte ist eine andere Schreibweise für (67).

Erstreckt man die nachstehenden Summen über alle ganzzahligen Werte $i_1, i_2, \ldots, i_k$, die der Gleichung $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$ und der beigefügten Ungleichung genügen, so erhält man:

$$\sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_k!} = k^n, \qquad i_s \geqq 0;$$

$$\sum \frac{n!}{(i_1+1)!\,(i_2+1)! \cdots (i_k+1)!} = T_n(k), \qquad i_s \geqq 0;$$

$$\sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_k!} = \Delta^k 0^n, \qquad i_s \geqq 1;$$

$$\sum \frac{n!}{(i_1+1)!\,(i_2+1)! \cdots (i_k+1)!} = \Delta^k T_n(0), \qquad i_s \geqq 1.$$

$$F_{k-i}(k) = (-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1} T_{k-i}(-k).$$

Führt man diesen Ausdruck in (64) ein, so ergibt sich

$$(-1)^i a_n^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} (-1)^k F_{k-i}(k) \frac{\Delta^k T_n(0)}{k!},$$

$$a_n^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} (-1)^k F_{k-i}(k) \frac{\Delta^k U_n(0)}{k!}.$$

Diese Formeln geben in Verbindung mit (67) und (68) vollkommene Einsicht in die Natur der Koeffizienten von $T_n(x)$ und damit die folgende *Fortsetzung des im* 6. *Abschnitt angeführten Satzes*: *In der ganzen rationalen Funktion*

$$F_n(x) = (-1)^n \binom{x-1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_n^{(i)} (-x)^i, \qquad n \geqq 1, \tag{71}$$

welche die Eigenschaft hat, für alle ganzzahligen x, *die* $\geqq n$ *sind, die Summe der Produkte von je* n *verschiedenen der Zahlen* $0, 1, 2, 3, \ldots, x-1$ *zu ergeben, haben die Koeffizienten* $a_n^{(i)}$ *die folgenden Werte*:

$$(-1)^i a_n^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \frac{F_{k-i}(k)}{k!} \underbrace{(A + A + \cdots + A)^{[n]}}_{(k)}, \tag{72}$$

$$a_n^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \frac{F_{k-i}(k)}{k!} \underbrace{(B + B + \cdots + B)^{[n]}}_{(k)}. \tag{73}$$

In (72) und (73) werden zur Bestimmung der Koeffizienten von $F_n(x)$ die Werte $F_{k-i}(k)$ verwendet, wobei in $F_{k-i}(k)$ das k nur die Werte $1, 2, 3, \ldots, n$ annehmen kann. Durch obigen Satz wird somit die Bestimmung der Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots, x-1$ auf die Bestimmung aller symmetrischen Grundfunktionen der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ zurückgeführt. Ebenso wie in der *Bernoulli*schen Funktion:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{x-1} k^n = \frac{(B+x)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1}$$

außer den *Bernoulli*schen Zahlen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ auch Binomialkoeffizienten vorkommen, so treten in der Funktion $F_n(x)$ neben den *Bernoulli*schen Zahlen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ die Werte $F_{k-i}(k)$ auf.

Durch (71) *ist für die symmetrischen Grundfunktionen natürlicher Zahlen die Analogie der Bernoullischen Funktion gegeben* [1]). Bemerkenswert ist hierbei, daß man die Koeffizienten von $F_n(x)$ entweder nach (72) durch die harmonischen oder nach (73) durch die *Bernoulli*schen Zahlen ausdrücken kann. Dasselbe ist aber auch für die eigentliche *Bernoulli*sche Funktion $S_n(x)$ erreichbar, da man auch in $S_n(x)$ an Stelle der B_n vermöge (69) die A_n einführen kann.

10.

Es sei p eine ungerade Primzahl und $F_n(p)$ bezeichne die Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ [2]).

[1]) Vergl. die Formeln (71), (72), (73) mit (49 b).

[2]) Im 6. Abschnitt haben wir $0, 1, 2, 3, \ldots, x-1$ geschrieben, damit $F_n(x)$ auch für $x = 1$ die gleiche Bedeutung beibehält und um im Einklang mit den Summen $0^n + 1^n + 2^n + \cdots + (x-1)^n = S_n(x)$ zu bleiben. Bei $x = p$ kommt jedoch der Fall $x = 1$ nicht in Betracht und wir können daher in diesem Abschnitt kürzer $1, 2, 3, \ldots, p-1$ anstatt $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$ schreiben.

Die Reste von $F_n(p)$ modulo p verdienen ein besonderes Interesse. Über diese Reste sind die folgenden Kongruenzen bekannt: Nach *Wilson*, *Lagrange*, *Ferrers* [1]) ist:

$$F_n(p) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad 1 \leqq n \leqq p-2, \tag{74}$$

$$F_{p-1}(p) = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \tag{75}$$

Nach *Wolstenholme*, *Nielsen* [2]) ist:

$$F_{2r}(p) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad 2 \leqq 2r \leqq p-3, \tag{74 a}$$

$$F_{2r+1}(p) \equiv 0 \pmod{p^2}, \qquad 3 \leqq 2r+1 \leqq p-2. \tag{76}$$

Nach *Glaisher* [3]) ist:

$$\frac{F_{2r}(p)}{p} \equiv -\frac{B_{2r}}{2r} \pmod{p}, \quad 2 \leqq 2r \leqq p-3, \tag{77}$$

$$\frac{F_{2r+1}(p)}{p^2} \equiv \frac{(2r+1)B_{2r}}{4r} \pmod{p}, \quad 3 \leqq 2r+1 \leqq p-2, \tag{78}$$

$$\frac{(p-1)!+1}{p} \equiv -1 + \frac{1}{p} + B_{p-1} \pmod{p}. \tag{79}$$

In den Kongruenzen (74 a), (76), (77), (78) ist durch die beigesetzte Ungleichung die ungerade Primzahl p auf die Werte $p > 3$ beschränkt.

Mehrere der Kongruenzen (74) bis (79) wurden wiederholt und nach verschiedenen Methoden bewiesen. Unsere Resultate über die Koeffizienten von $T_n(x)$ gestatten, alle diese Kongruenzen auf kurzem Wege in Evidenz zu setzen und zum Teil auch zu verschärfen. Ferner wird es möglich sein, alle Kongruenzen (74) bis (79) für $p > 3$ in eine einzige Kongruenz zusammenzufassen.

Ein Bruch heiße (wie üblich) kongruent Null (mod. m), wenn sein Zähler durch m teilbar und sein Nenner zu m teilerfremd ist. Die Kongruenz $a\,x \equiv b \pmod{m}$ ist gleichbedeutend mit $x \equiv \frac{b}{a} \pmod{m}$, wenn a und m teilerfremd sind. Zwei rationale Zahlen sind kongruent (mod. m), wenn ihre Differenz kongruent Null (mod. m) ist.

Wird der Zähler von

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!}$$

mod. p^2 genommen, so erhält man

$$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n + (-1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)p, \pmod{p^2}.$$

Wir verwenden im folgenden diese Kongruenz in der Form:

---

[1]) *Lagrange*: Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers (ex 1771), Oeuvres, tome 3, Paris 1869, Seite 425. Lagrange beweist in dieser Abhandlung den Satz von Wilson $F_{p-1}(p) \equiv -1 \pmod{p}$ und gleichzeitig für $n < p-1$ die Kongruenz $F_n(p) \equiv 0 \pmod{p}$, ohne die letztere ausdrücklich hervorzuheben. Die Kongruenz $F_n(p) \equiv 0 \pmod{p}$ wird auch *Ferrers* zugeschrieben, der dieselbe später nochmals bewiesen hat. (Vergleiche die unter [3]) angeführte erste Abhandlung von Glaisher, Seite 1 und 4.)

[2]) Die Kongruenz $F_{p-2}(p) \equiv 0 \pmod{p^2}$, $p > 3$, wurde von *Wolstenholme* (1862) und die allgemeinere Kongruenz (76) von *Nielsen* (1893) bewiesen.

Wolstenholme: On certain properties of prime numbers, Quarterly Journal of Mathematics, Vol. VI, 1862, Seite 35—39.

Niels Nielsen: Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris 1923, Seite 326 und 327.

[3]) *J. W. L. Glaisher*: Congruences relating to the sums of products of the first n numbers and to other sums of products. Quarterly Journal of Mathematics, Vol. XXXI, 1900, Seite 1—35.

J. W. L. Glaisher: On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers, and their powers to modulus p^2 or p^3, Vol. XXXI, 1900, Seite 321—353.

$$\binom{p-1}{n} = (-1)^n \left(1 - p \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + lp^2\right). \tag{80}$$

Die Zahl l ist eine rationale Zahl, in deren Nenner die Primzahl p nicht vorkommt.

Nach (71) kann $F_n(p)$ auf die Form gebracht werden:

$$F_n(p) = (-1)^n \binom{p-1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_n^{(i)} p^i. \tag{81}$$

Die im Nenner von $a_n^{(i)}$ vorkommenden Primzahlen q genügen nach (60) der Beziehung

$$q \leqq n - i + 2.$$

In $F_n(p)$ ist sinngemäß $n \leqq p-1$ anzunehmen. Den Fall $n = p-1$ behandeln wir weiter unten. Ist $n < p-1$, so ist $q < p - i + 1$, also $q < p$. Das bedeutet, daß die Primzahl p im Nenner von $a_n^{(i)}$ nicht vorkommt. Die rechte Seite von (81) ist also (für $n < p-1$) durch p teilbar, wodurch die Kongruenz (*Lagrange*):

$$F_n(p) \equiv 0 \pmod{p}, \quad n < p-1,$$

in Evidenz gesetzt ist. Bemerkt man, daß nach (59):

$$a_n^{(1)} = (-1)^n \frac{B_n}{n}$$

ist und daher $a_n^{(1)}$ für ein ungerades n (mit Ausnahme von $n = 1$) verschwindet, so kann aus (81) auch die Kongruenz (76) (*Nielsen*, *Wolstenholme*):

$$F_{2r+1}(p) \equiv 0 \pmod{p^2}, \quad 3 \leqq 2r+1 \leqq p-2,$$

abgelesen werden. Weiter folgt aus (81) die Kongruenz:

$$F_n(p) \equiv -a_n^{(1)} p \pmod{p^2}, \quad 1 \leqq n \leqq p-2,$$

die für gerade n mit der Kongruenz (77) von *Glaisher*, für ungerade $n > 1$ mit (76) identisch und auch für $n = 1$ richtig ist. Nach (80) und (81) ist:

$$F_n(p) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_n^{(i)} \left(p^i - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} p^{i+1} + lp^{i+2}\right). \tag{82}$$

Hieraus folgt:

$$F_n(p) \equiv -a_n^{(1)} \left(p - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} p^2\right) + a_n^{(2)} p^2 \pmod{p^3}, \tag{83}$$

$$1 \leqq n < p-1.$$

Werden in diese Kongruenz die aus (59) für ein ungerades $n > 1$ sich ergebenden Werte eingeführt:

$$a_{2r+1}^{(1)} = 0, \quad a_{2r+1}^{(2)} = -B_1 B_{2r} \frac{2r+1}{2r}, \quad \text{beide für } r > 0,$$

so erhält man die Kongruenz (78) von *Glaisher*.

Die Kongruenz (83) liefert ferner in Verbindung mit den Werten von $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ aus (59) die folgende Verschärfung der von *Glaisher* aufgestellten Kongruenz (77):

$$\frac{F_{2r}(p)}{p} \equiv \frac{B_{2r}}{2r}\left(-1 + p \sum_{k=1}^{2r} \frac{1}{k}\right) + \frac{p}{2r} \sum_{k=1}^{2r-1} \binom{2r}{k} \frac{B_k}{k} B_{2r-k} \pmod{p^2}, \tag{84}$$

$$2 \leqq 2r < p-1.$$

Der oben zurückgestellte Fall $n = p-1$ läßt sich noch einfacher erledigen. Nach (81) ist:

$$(85) \qquad F_{p-1}(p) = (p-1)! = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i a_{p-1}^{(i)} p^i \,.$$

Die Beziehung (60): $q \leqq n - i + 2$ ergibt für $n = p - 1$ die Relation $q \leqq p - i + 1$. Es ist also $q \leqq p$ für $i = 1$ und $q < p$ für $i > 1$. Das bedeutet, daß die Primzahl p im Nenner von $a_{p-1}^{(i)}$ (bei $i > 1$) nicht vorkommt. Man darf daher aus (85) die Kongruenzen:

$$(86) \qquad \begin{aligned} (p-1)! &\equiv -a_{p-1}^{(1)} p && \text{(mod. } p^2\text{)}, \\ (p-1)! &\equiv -a_{p-1}^{(1)} p + a_{p-1}^{(2)} p^2 && \text{(mod. } p^3\text{)} \end{aligned}$$

folgern. Nach Einführung der Werte für $a_{p-1}^{(1)}$ und $a_{p-1}^{(2)}$ aus (59) erhält man

$$(87) \qquad (p-1)! \equiv -\frac{p}{p-1} B_{p-1} \qquad \text{(mod. } p^2\text{)},$$

$$(88) \qquad (p-1)! \equiv -\frac{p}{p-1} B_{p-1} + \frac{p^2}{p-1} \sum_{k=1}^{p-2} \binom{p-1}{k} \frac{B_k}{k} B_{p-1-k} \qquad \text{(mod. } p^3\text{)}.$$

Die Kongruenz (87) kann leicht auf die Form von (79) gebracht werden [1]); die Kongruenz (88) ist eine (vielleicht neue) Verschärfung der von *Glaisher* aufgestellten Kongruenz (79).

Hiermit erscheinen alle Kongruenzen (74) bis (79) auf Grund der einen Gleichung (81) bewiesen, die ferner zu den Kongruenzen (84) und (88) geführt hat.

Die für $n < p - 1$ bewiesene Kongruenz (83) ist bei $p > 3$ auch für $n = p - 1$ richtig, da sie dann auf folgendem Wege in (88) übergeht. Es ist (nach der Bedeutung von $F_n(p)$):

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \frac{F_{p-2}(p)}{(p-1)!}.$$

Da $F_{p-2}(p)$ nach (76) für $3 \leqq p - 2$, also für $p > 3$ durch p^2 teilbar ist, so ist (wie von *Wolstenholme* (l. c.) auf anderem Wege bewiesen wurde) auch:

$$(90) \qquad \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p^2\text{)}, \qquad p > 3.$$

Die als Faktor dieser Summe in (83) vorkommende Zahl $a_{p-1}^{(1)} = \frac{B_{p-1}}{p-1}$ enthält die Primzahl p im Nenner in der ersten Potenz, und es folgt daher aus (90):

$$p^2 a_{p-1}^{(1)} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p^3\text{)}, \qquad p > 3,$$

womit gezeigt ist, daß (83) für $n = p - 1$ und $p > 3$ in (88) übergeht.

Wir fassen die Resultate dieses Abschnittes zusammen:

Bezeichnet p eine ungerade Primzahl und $F_n(p)$ die Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$, *so ist nach* (71):

---

[1]) Aus (87) folgt: $(p-1)!\, p - (p-1)! \equiv -p\, B_{p-1}$ (mod. p^2). Andererseits ist $(p-1)!\, p \equiv -p$ (mod. p^2) und daher $(p-1)! \equiv p\, B_{p-1} - p$ (mod. p^2), womit (87) auf die Form (79) zurückgeführt ist. Der Vollständigkeit wegen sei bemerkt, daß in (87) der Wilsonsche Satz (75) enthalten ist. Aus der Definitionsgleichung (30) der Bernoullischen Zahlen kann leicht die Beziehung abgeleitet werden:

$$(89) \qquad B_{p-1} = -\frac{1}{p} + l.$$

Hier ist l eine rationale Zahl, in deren Nenner die Primzahl p nicht vorkommt. Diese Beziehung (die auch eine Folgerung des Satzes von Staudt-Clausen darstellt) ergibt in Verbindung mit (87) den Wilsonschen Satz in der Form

$$(p-1)! \equiv \frac{1 - p\,l}{p-1} \text{ (mod. } p^2\text{)}.$$

$$F_n(p) = (-1)^n \binom{p-1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_n^{(i)} p^i,$$
$$1 \leqq n \leqq p-1.$$

Der Nenner von $a_{p-1}^{(1)}$ *ist durch* p *teilbar, in den Nennern aller anderen* $a_n^{(i)}$ *geht die Primzahl* p *nicht auf. Es bestehen die Kongruenzen:*

$$F_{p-1}(p) \equiv -a_{p-1}^{(1)} p + a_{p-1}^{(2)} p^2 \pmod{p^3}, \tag{91}$$

$$F_n(p) \equiv -a_n^{(1)} p + a_n^{(2)} p^2 + a_n^{(1)} p^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \pmod{p^3}, \tag{92}$$
$$1 \leqq n < p-1.$$

Hierbei gelten die Werte:

$$a_n^{(1)} = (-1)^n \frac{B_n}{n} \quad \text{für} \quad 1 \leqq n \leqq p-1, \quad a_1^{(2)} = 0,$$
$$a_n^{(2)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{k} B_{n-k} \quad \text{für} \quad 1 < n \leqq p-1. \tag{93}$$

Für $p > 3$ *und* $n = p-1$ *geht* (92) *in* (91) *über. Alle Kongruenzen* (74) *bis* (79) *sowie die zwei hier aufgestellten Kongruenzen* (84) *und* (88) *sind für* $p > 3$ *in der einen Kongruenz* (92) *und für* $p = 3$ *in den zwei Kongruenzen* (91), (92) *enthalten.*

11.

Es sei p eine ungerade Primzahl, g eine ganze positive Zahl, deren Primteiler nicht kleiner als p sind, und h eine beliebige natürliche Zahl. Mit den im 10. Abschnitt angewendeten Hilfsmitteln können auch Kongruenzen für $F_n(gh)$ abgeleitet werden.

Nach (71) ist:

$$F_n(gh) = (-1)^n \binom{gh-1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_n^{(i)} g^i h^i. \tag{94}$$

Die im Nenner von $a_n^{(i)}$ vorkommenden Primzahlen q genügen nach (60) der Beziehung $q \leqq n - i + 2$. Wird also n auf die Werte $n < p$ beschränkt, so ist $q < p$ für $i > 1$. Ist jedoch $n < p-1$, so ist $q < p$ für $i \geqq 1$. Für $n = p-1$ und $i = 1$ ist $q \leqq p$. Aus dieser Überlegung folgt: Wird n auf die Werte $n < p$ beschränkt, so ist bei $i > 1$ der Nenner von $a_n^{(i)}$ durch p nicht teilbar; der Nenner von

$$a_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{n} B_n$$

ist für $n = p-1$ durch p teilbar und für $n < p-1$ nicht teilbar.

Beschränkt man sich zunächst auf den Fall $n < p-1$, so ist in (94) die rechte Seite durch g teilbar, also

$$F_n(gh) \equiv 0 \pmod{g}, \quad 1 \leqq n \leqq p-2. \tag{95}$$

Ist n ungerade, so ist $a_n^{(1)} = 0$ für $n > 1$, daher in (94) die rechte Seite durch g^2 teilbar, also

$$F_{2r+1}(gh) \equiv 0 \pmod{g^2}, \quad 3 \leqq 2r+1 \leqq p-2. \tag{96}$$

Durch die Bedingung $3 \leqq p-2$ ist in (96) die ungerade Primzahl p auf die Werte $p > 3$ beschränkt. Die Kongruenzen (95) und (96) sind Verallgemeinerungen der Kongruenzen (74) und (76).

Es soll nun der Fall $n \leqq p-1$ untersucht werden. Aus (94) folgt:

$$F_n(gh) \equiv (-1)^n \binom{gh-1}{n} (-a_n^{(1)} gh + a_n^{(2)} g^2 h^2) \pmod{g^3}, \tag{97}$$
$$1 \leqq n \leqq p-1.$$

Ferner kann

$$\binom{gh-1}{n} = (-1)^n \left(1 - gh \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + g^2 h^2 l\right) \tag{98}$$

gesetzt werden; hier ist l eine rationale Zahl, deren Nenner zu g teilerfremd ist, da die Primteiler von g laut Voraussetzung $\geqq p$ sind und n auf die Werte $n \leqq p-1$ beschränkt wurde. Durch Verbindung von (97) und (98) erhält man die Kongruenz:

$$F_n(gh) \equiv -a_n^{(1)} gh + \left(a_n^{(1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + a_n^{(2)}\right) g^2 h^2 - a_n^{(1)} g^3 h^3 l \pmod{g^3}, \tag{99}$$

$$1 \leqq n \leqq p-1.$$

In dieser Kongruenz darf für $n < p-1$ das letzte Glied rechts unterdrückt werden, da der Nenner von $a_n^{(1)}$ für $n < p-1$ durch p nicht teilbar ist. Für $n = p-1$ darf dieses Glied nur dann weggelassen werden, wenn von der Zahl g vorausgesetzt wird, daß ihre Primteiler größer (nicht wie bisher $\geqq$) als p sind. Der Kongruenz (99) kann man alle im nachstehenden Satz angeführten Kongruenzen entnehmen [1]):

Bezeichnet p eine ungerade Primzahl, g eine ganze positive Zahl, deren Primfaktoren nicht kleiner als p sind, h eine beliebige natürliche Zahl und $F_n(gh)$ die Summe der Produkte von je n verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, gh-1$, so gelten die Kongruenzen

$$F_n(gh) \equiv 0 \pmod{g}, \quad 1 \leqq n \leqq p-2, \tag{95}$$

$$F_{2r+1}(gh) \equiv 0 \pmod{g^2}, \quad 3 \leqq 2r+1 \leqq p-2 \quad (\text{also } p > 3), \tag{96}$$

$$F_n(gh) \equiv -a_n^{(1)} gh \pmod{g^2}, \quad 1 \leqq n \leqq p-1, \tag{100}$$

$$F_n(gh) \equiv -a_n^{(1)} gh + \left(a_n^{(1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + a_n^{(2)}\right) g^2 h^2 \pmod{g^3}, \tag{101}$$

$$1 \leqq n \leqq p-2.$$

Ist g durch p nicht teilbar, so besteht die Kongruenz (101) *auch für $n = p-1$. Die Werte von $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ sind unter* (93) *angeführt.*

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß die Kongruenz (95) auch für $n = p-1$ richtig bleibt, wenn alle Primzahlen von g größer als p sind.

12.

Glaisher [2]) hat für $F_n(a)$ die folgende bemerkenswerte Kongruenz bewiesen:
Ist π eine Primzahl $\leqq a$ und $a = k\pi + r$, $0 \leqq r < \pi$, so ist:

$$F_{\pi-1}(a) \equiv -k \pmod{\pi}. \tag{102}$$

Dieser Kongruenz von *Glaisher* kann auf Grund von (100) eine andere zur Seite gestellt werden, die das Verhalten von $F_{\pi-1}(gh)$ nach dem Modul g beziehungsweise g^2 angibt. Aus (100) folgt für $n = p-1$:

$$F_{p-1}(gh) \equiv -\frac{gh}{p-1} B_{p-1} \pmod{g^2}. \tag{103}$$

---

[1]) Einer besonderen Begründung bedarf hierbei noch die Kongruenz (100). Dieselbe folgt aus (99), wenn bemerkt wird, daß der Nenner von $a_n^{(1)}$ für $n < p-1$ und der von $a_n^{(2)}$ für $n \leqq p-1$ zu g teilerfremd sind. Für $n = p-1$ ist der Nenner von $a_n^{(1)}$ (wie wiederholt bemerkt) durch p^1 teilbar (jedoch nicht durch p^2), aber andererseits ist auch $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$ durch p teilbar. (Bei $p > 3$ ist diese Summe nach (90) sogar durch p^2 teilbar.)

[2]) Glaisher l. c., Seite 23.

Führt man hier

$$B_{p-1} = -\frac{1}{p} + l$$

ein, so erhält man:

$$F_{p-1}(gh) \equiv \frac{gh}{p(p-1)} - \frac{ghl}{p-1} \pmod{g^2}.$$

Aus dem Satz von *Staudt-Clausen* folgt, daß im Nenner der rationalen Zahl l nur Primzahlen, die kleiner als p sind, vorkommen. Die Primzahlen von g sind aber laut Voraussetzung (11. Abschnitt) $\geqq p$ und daraus folgt, daß der Zähler des Bruches $\frac{ghl}{p-1}$ durch g teilbar ist. Für den Modul g ergibt sich daher die Kongruenz:

$$F_{p-1}(gh) \equiv \frac{gh}{p(p-1)} \pmod{g}. \tag{104}$$

Wird in (104) $g = p = \pi$ und $h = k$ gesetzt, so ergibt sich die Kongruenz (102) für den Fall $r = 0$.

Wird von der Zahl g vorausgesetzt, daß alle ihre Primzahlen *größer* als p sind, so ist die rechte Seite von (104) durch g teilbar, also

$$F_{p-1}(gh) \equiv 0 \pmod{g}. \tag{105}$$

(105) ist eine Ergänzung der Kongruenz (95):

$$F_n(gh) \equiv 0 \pmod{g}, \quad 1 \leqq n \leqq p-2,$$

für den Fall $n = p - 1$. (Die Kongruenz (95) wurde unter der weitergehenden Annahme abgeleitet, daß die Primzahlen von g *nicht kleiner* als p sind.)

Das in (103) bis (105) erhaltene Resultat kann auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Bezeichnet p eine ungerade Primzahl, a eine natürliche Zahl, von der vorausgesetzt wird, daß nicht alle ihre Primteiler kleiner als p sind, und $F_{p-1}(a)$ die Summe der Produkte von je $p-1$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, a-1$, so bestehen die Kongruenzen:

$$F_{p-1}(a) \equiv \frac{a}{p(p-1)} \pmod{g}, \tag{106}$$

$$F_{p-1}(a) \equiv -\frac{a}{p-1} B_{p-1} \pmod{g^2} \tag{107}$$

für jeden Primteiler g der Zahl a, der nicht kleiner als p ist. Für jeden Primteiler g der Zahl a, der größer als p ist, kann die Kongruenz (106) *durch*

$$F_{p-1}(a) \equiv 0 \pmod{g} \tag{108}$$

ersetzt werden.

Die von *Glaisher* bewiesene Kongruenz (102) sowie die Kongruenzen (106), (107), (108) können als Verallgemeinerungen des *Wilson*schen Satzes:

$$F_{p-1}(p) = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

angesehen werden.

Eingegangen 15. März 1928.

Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers.

Von *N. Tschebotarëw* in Kasan.

Die Bestimmung der Klassenzahl eines Körpers [1]) geschieht bis jetzt für den allgemeinen Fall nur durch transzendente Ausdrücke. Sogar in einfachsten Fällen verhindert die additive Struktur der bekannten „geschlossenen Ausdrücke", etwas über die Primfaktoren der Klassenzahl zu sagen. Darüber war mir nur ein Satz bekannt, der aus den berühmten *Gauß*schen Untersuchungen über genera formarum folgt (ich ziehe dabei nicht die Relationen zwischen Klassenzahlen verschiedener Körper in Betracht):

Enthält ein quadratischer Körper nur eine kritische Primzahl, so ist seine Klassenzahl notwendig ungerade. Gibt es dagegen mehrere kritische Primzahlen, so ist die Klassenzahl dieses Körpers gerade, und die in dieser Klassenzahl enthaltene Potenz von 2 *ist durch die Anzahl der kritischen Primzahlen völlig bestimmt.*

Die erste Behauptung dieses Satzes ist merkwürdigerweise mit dem folgenden Satz der allgemeinen Zahlentheorie verbunden, welchen man als eine Erweiterung des Monodromiesatzes [2]) auffassen kann:

Satz 1. *Es gibt keinen echten Teiler der Galoisschen Gruppe eines normalen Körpers, der alle Trägheitsgruppen umfaßt.*

Diesen Satz [3]) kann man andererseits als eine Verschärfung des *Minkowski*schen Diskriminantensatzes [4]) betrachten.

In einer früheren Arbeit (loc. cit., Anm. 3) habe ich diesen Satz auf Kreiskörper angewandt und gewisse Kongruenzeigenschaften erhalten, welche jeder Faktor der Klassenzahl besitzt.

In dieser Arbeit will ich eine ähnliche Untersuchung für allgemeine normale Körper unternehmen. Die Verschiedenartigkeit der Struktur ihrer *Galois*schen Gruppen erlaubt nicht, so einfache Resultate zu erhalten. Ich ordne der Klassengruppe eines normalen Körpers die Relativgruppe seines Klassenkörpers zu. Dabei betrachte ich hier nur absolute Idealklassen im engeren Sinne, so daß unter dem Klassenkörper stets der umfassendste relativ *Abel*sche unverzweigte Relativkörper zu verstehen ist.

Dieser Klassenkörper ist offenbar absolut normal. Man zerlege ihn in Teilklassenkörper, von denen jeder absolut normal ist und keine weitere Zerlegung in absolut normale Körper zuläßt. Dabei verstehe ich unter „Zerlegung" eine Darstellung des Körpers als Kompositum von absolut normalen Unterkörpern. Solche Körper wollen wir elementare (absolut normale) Teilklassenkörper nennen. Jeder der so gebildeten Teilklassenkörper hat eine Relativgruppe von einem ν-gliedrigen Typus $\{p^\mu, p^\mu, \ldots, p^\mu\}$, so daß ihm als Klassenzahlfaktor $p^{\mu\nu}$ entspricht. Wir wollen solche Teilklassenkörper

[1]) Wir wollen unter „Körper" immer einen algebraischen Zahlkörper verstehen.

[2]) *C. Jordan,* Traité des substitutions. Paris 1870, pp. 277—279.

[3]) *N. Tschebotarëw,* Eine Verallgemeinerung des Minkowskischen Satzes u.s.w. Journal des Forschungsinst. Odessa **1**, Nr. 4 (1924).

[4]) *H. Weber,* Lehrbuch der Algebra **2** (1899), S. 691, Satz 4.

und auch die ihnen entsprechenden Klassenzahlfaktoren in vier Arten einteilen und für jede dieser Arten besondere Eigenschaften konstatieren. Die Definition dieser Arten erfolgt später (siehe § 3, Definition 4).

I. Eigentliche Klassenzahlfaktoren. Es sei K ein normaler Körper und K_p sei der eigentliche elementare Teilklassenkörper vom Relativgrade $p^{\mu\nu}$ mit der Relativgruppe vom ν-gliedrigen Typus $\{p^\mu, p^\mu, \ldots, p^\mu\}$. Dann ist die Gruppe von K einstufig isomorph mit einem Teiler des Holomorphs der *Abel*schen Gruppe vom ν-gliedrigen Typus $\{p^\mu, p^\mu, \ldots, p^\mu\}$.

Ist insbesondere $\mu = 1$, dann ist die Gruppe von K einstufig isomorph mit einer transitiven Kongruenzgruppe ganzzahliger homogener linearer Substitutionen modulo p von ν Symbolen.

Ist $\mu = \nu = 1$ (was nur bei zyklischen Körpern K eintreten kann), dann gilt:

$$p \equiv 1 \pmod{g},$$

wobei g den Grad von K bedeutet.

II. Uneigentliche Klassenzahlfaktoren. Ist K_p ein in I erläuterter Körper, der einem uneigentlichen Klassenzahlfaktor entspricht, dann enthält K einen normalen Unterkörper $\overline{K}$, dessen Klassenzahl ebenfalls den Faktor p enthält. Der entsprechende Teilklassenkörper $\overline{K}_p$ über $\overline{K}$ erzeugt durch Adjunktion von K den ganzen Körper K_p. $\overline{K}$ enthält seinerseits einen normalen Unterkörper $\overline{\overline{K}}$, so daß $\overline{K}_p$ unverzweigt über $\overline{\overline{K}}$ ist. Die Gruppe von $\overline{\overline{K}}$ ist im Holomorph der Relativgruppe von $\overline{K}_p$ über $\overline{\overline{K}}$ enthalten. Dieser Fall ist analog dem Falle I, kann aber nicht so einfach wie der Fall I erledigt werden, da die Relativgruppe von $\overline{K}_p$ über $\overline{\overline{K}}$ nicht *Abel*sch zu sein braucht.

III. Zentrale Klassenzahlfaktoren. In diesem Falle sind sowohl die Klassenzahlfaktoren als auch ihre in der Klassenzahl aufgehende Potenz durch die Struktur der Gruppe von K bestimmt. Diese Art Klassenzahlfaktoren kommt bei zyklischen Körpern nicht vor.

IV. Geschlechterklassenzahlfaktoren. In diesem Falle sind die Klassenzahlprimfaktoren p ebenfalls durch die Struktur der Gruppe von K bestimmt (genauer: sie sind Teiler des Grades von K). Ihre in der Klassenzahl aufgehende Potenz hängt aber von der Anzahl der kritischen Primideale von K ab. Diese Art Klassenzahlfaktoren kann auch bei den einfachsten, z. B. quadratischen Körpern vorkommen.

Eine Primzahl kann sehr wohl in verschiedenen Klassenzahlfaktoren eines und desselben Körpers aufgehen.

Ich erlaube mir, Herrn *H. Hasse* für mehrere wichtige Ratschläge betreffs der Darstellungsform und auch für einige inhaltliche Bemerkungen, und Herrn *O. Schreier* für die verbesserte Darstellung des Beweises des gruppentheoretischen Satzes 2 meinen herzlichen Dank auszusprechen.

§ 1. Zahlentheoretischer Monodromiesatz.

Betrachten wir die p-adischen Entwicklungen der Zahlen eines normalen Körpers [5]), so sehen wir leicht, daß der Satz 1 ein zahlentheoretisches Analogon des Monodromiesatzes ist, da eine algebraische Zahl α dann und nur dann eine Entwicklung nach gebrochenen Potenzen von p besitzt, wenn p im Körper $R(\alpha)$ kritisch ist.

Es sei K ein normaler Körper. Betrachten wir alle seine Unterkörper $R(\alpha)$, d. h.

---

[5]) *K. Hensel,* Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1908.

die Körper, die durch Adjunktion der in K enthaltenen Zahlen α zu dem Körper R der rationalen Zahlen entstehen!

Wir fragen uns: Welches ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene Primzahl p in $R(\alpha)$ nicht kritisch ist, d. h. daß die Zerlegung von p in ideale Primfaktoren in $R(\alpha)$ keine mehrfachen Faktoren enthält?

$\mathfrak{H}$ sei die Gruppe, zu der α innerhalb K gehört. Die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ eines Primidealfaktors $\mathfrak{P}$ von p ist der Inbegriff von Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ von K, die das Funktional $t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \cdots + t_n\omega_n$ modulo $\mathfrak{P}$ ungeändert lassen, wobei $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ eine Minimalbasis von K ist. Damit p in $R(\alpha)$ nicht kritisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß alle Elemente $t_1(\Omega_1 - \Omega_1^s) + t_2(\Omega_2 - \Omega_2^s) + \cdots + t_m(\Omega_m - \Omega_m^s)$ relativ prim zu p sind, wobei $[\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m]$ eine Minimalbasis von $R(\alpha)$ ist und S alle Substitutionen der Gruppe von $R(\alpha)$ durchläuft, die $t_1\Omega_1 + t_2\Omega_2 + \cdots + t_m\Omega_m$ wirklich ändern. Mit anderen Worten, $t_1\Omega_1 + t_2\Omega_2 + \cdots + t_m\Omega_m$ muß durch diejenigen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ völlig ungeändert bleiben, die $t_1\Omega_1 + t_2\Omega_2 + \cdots + t_m\Omega_m$ modulo $\mathfrak{P}$ nicht verändern; diese Substitutionen müssen also in $\mathfrak{H}$ enthalten sein. Dies besagt: Ist p nicht kritisch, so enthält $\mathfrak{H}$ alle den Primidealfaktoren von p entsprechenden Trägheitsgruppen.

Umgekehrt, enthält $\mathfrak{H}$ alle erwähnten Trägheitsgruppen, so ist p in $R(\alpha)$ nicht kritisch. Denn $t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \cdots + t_n\omega_n \equiv t_1\tilde{\omega}_1 + t_2\tilde{\omega}_2 + \cdots + t_n\tilde{\omega}_n (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P})$, wo $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_n$ Zahlen des Trägheitskörpers von $\mathfrak{P}$ sind. Gehört also S nicht zu $\mathfrak{T}$, so bleibt $t_1\tilde{\omega}_1 + t_2\tilde{\omega}_2 + \cdots + t_n\tilde{\omega}_n$ bei der Operation S nicht modulo $\mathfrak{P}$ unverändert, woraus folgt, daß alle Elemente und also die Differente des Trägheitskörpers zu $\mathfrak{P}$ relativ prim sind. Dies gilt a fortiori von seinem Unterköper $R(\alpha)$. Da aber $\mathfrak{H}$ alle mit $\mathfrak{T}$ konjugierten Trägheitsgruppen enthalten soll, so schließen wir, daß die Differente von $R(\alpha)$ keinen mit p gemeinsamen Idealteiler enthält, d. h. daß p in $R(\alpha)$ nicht kritisch ist, w. z. b. w.

Demnach besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß p in $R(\alpha)$ nicht kritisch ist, darin, daß alle der Primzahl p entsprechenden Trägheitsgruppen Teiler der Gruppe $\mathfrak{H}$ sind, zu der α in K gehört.

Nun fassen wir diese Bedingungen für alle Primzahlen zusammen. Dabei genügt es, nur die Primteiler der Körperdiskriminante von K zu betrachten, da die übrigen Primzahlen gewiß nicht kritisch sind. Der *Minkowski*sche Satz (loc. cit. [Anm. 4]) besagt, daß sämtliche Primzahlen dann und nur dann nicht kritisch in $R(\alpha)$ sind, wenn α rational ist. Daraus folgt der Satz:

Ein Element eines normalen Körpers ist dann und nur dann rational, wenn alle Trägheitsgruppen von K Teiler der Gruppe sind, zu der α gehört.

Ziehen wir die Definition der *Galois*schen Gruppe in Betracht, so folgt der Satz 1, den man auch folgendermaßen aussprechen kann:

Durch Komposition sämtlicher Trägheitsgruppen eines normalen Körpers K erhält man sämtliche Substitutionen der Galoisschen Gruppe von K.

Nehmen wir nun an, daß R nicht der Körper der rationalen Zahlen, sondern ein beliebiger Körper ist, so führen unsere Überlegungen zu folgender Verallgemeinerung des Satzes 1:

Satz 1a. *Durch Komposition sämtlicher Relativträgheitsgruppen in bezug auf einen beliebigen Körper R entsteht die Gruppe, zu welcher der umfassendste in bezug auf R unverzweigte Unterkörper von K über R gehört.*

§ 2. Ein gruppentheoretischer Hilfssatz.

Satz 2. *$\mathfrak{G}$ sei eine endliche Gruppe, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ ein System von Elementen aus $\mathfrak{G}$, welche folgende Eigenschaften besitzen:*

a) Durch Komposition von $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ werden alle Elemente von $\mathfrak{G}$ erzeugt.

b) Kommt in diesem System $Q_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ vor, so sind darin auch alle seine Konjugierten enthalten.

Es sei ferner $\mathfrak{G}'$ eine Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

1) *$\mathfrak{G}$ ist einstufig isomorph mit einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}'$.*

2) *Die Gruppe $\mathfrak{H}$ ist im Zentrum von $\mathfrak{G}'$ enthalten.*

3) *Es gibt in $\mathfrak{G}'$ Elemente $Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$ derart, daß die Nebengruppen $\mathfrak{H}Q_i'$ bei der Abbildung $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{G}$ den Elementen Q_i entsprechen $(i = 1, 2, \ldots, m)$.*

4) *Die Ordnungen von Q_i' und Q_i sind einander gleich.*

5) *Alle Elemente von $\mathfrak{H}$ (und also alle von $\mathfrak{G}'$) lassen sich durch $Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$ ausdrücken.*

Dann ist $\mathfrak{G}'$ mit einer Faktorgruppe einer festen (nur von $\mathfrak{G}$ und von der Wahl von $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ abhängigen) endlichen Gruppe einstufig isomorph. — Insbesondere ist $\mathfrak{G}'$ auch endlich.

Beweis. Die Elemente von $\mathfrak{G}$ seien $P_1 = E, P_2, \ldots, P_n$ (n die Ordnung von $\mathfrak{G}$); sie drücken sich durch $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ folgendermaßen aus (nicht eindeutig, aber von vornherein fixiert):

$$P_k = \varphi_k(Q_\alpha) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{1.2}$$

Ein System definierender Relationen für $\mathfrak{G}$ sei:

$$g_\beta(Q_\alpha) = 1, \tag{2.2}$$

oder ausführlich:

$$Q_1^{\omega\beta 1} Q_2^{\omega\beta 2} \cdots Q_m^{\omega\beta m} = 1. \tag{2'.2}$$

Da vermöge des Isomorphismus $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ jede dieser Relationen folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$(\mathfrak{H}Q_1')^{\omega\beta 1} (\mathfrak{H}Q_2')^{\omega\beta 2} \cdots (\mathfrak{H}Q_m')^{\omega\beta m} = \mathfrak{H},$$

so folgt wegen 2):

$$Q_1'^{\omega\beta 1} Q_2'^{\omega\beta 2} \cdots Q_m'^{\omega\beta m} = H_\beta, \tag{3.2}$$

wobei H_β ein Element von $\mathfrak{H}$ ist.

Ich behaupte, daß die H_β durch Komposition die ganze Gruppe $\mathfrak{H}$ erzeugen. Wir nehmen das Gegenteil an, daß nämlich die H_β in einer echten Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}$ enthalten sind. $\mathfrak{A}$ ist wegen 2) Normalteiler von $\mathfrak{G}'$. Dann wird die Faktorgruppe $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ durch Elemente Q_α'' $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ erzeugt, die den Relationen $g_\beta(Q_\alpha'') = 1$ genügen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß (2.2) die definierenden Gleichungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind.

Nun sei die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ durch die Relationen

$$G_\beta(\overline{Q}_\alpha) = \overline{H}_\beta \tag{4.2}$$

(und unter diesen Relationen:

$$\overline{Q}_\alpha^{m_\alpha} = 1, \tag{4'.2}$$

wenn

$$Q_\alpha^{n_\alpha} = 1 \text{ ist}), \tag{4''.2}$$

$$\varphi_k(\overline{Q}_\alpha)\, \overline{H}_\beta\, \varphi_k^{-1}(\overline{Q}_\alpha) = \overline{H}_\beta, \tag{5.2}$$

(6.2) $$f_{kl}(\overline{Q}_\alpha)\,\overline{Q}_k\,f_{kl}^{-1}(\overline{Q}_\alpha) = \overline{Q}_l$$

definiert, wobei

(7.2) $$f_{kl}(Q_\alpha)\,Q_k\,f_{kl}^{-1}(Q_\alpha) = Q_l$$

ist. Dann genügt $\overline{\mathfrak{G}}$ allen Bedingungen des Satzes: 1) und 3) folgen aus (4.2), (5.2), (6.2) zusammen mit (2.2); 2) folgt aus (5.2); 4) folgt aus (4'.2), (4''.2); 5) folgt aus (4.2).

Jede den Bedingungen des Satzes genügende Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist mit einer Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ einstufig isomorph. Ordnen wir nämlich $\overline{Q}_\alpha \to Q'_\alpha$ zu, so bleiben wegen 1), 2), 3), 4), 5) alle Relationen (4.2), (5.2), (6.2) bestehen.

Es bleibt also nur noch die Endlichkeit von $\overline{\mathfrak{G}}$ zu beweisen. Dazu setzen wir erstens:

(8.2) $$\overline{Q}_\alpha\,\overline{Q}_\beta\,\overline{Q}_\alpha^{-1} = \overline{Q}_\gamma U_{\alpha\beta},$$

wobei γ durch die Relation $Q_\gamma = Q_\alpha Q_\beta Q_\alpha^{-1}$ bestimmt wird. Da $\overline{Q}_\alpha^n = 1$ für alle α ist, und da die $\overline{H}$ mit allen $\overline{Q}$ vertauschbar sind, schließen wir durch Erheben von (8.2) in die n-te Potenz:

(9.2) $$U_{\alpha\beta}^n = 1.$$

Also ist $U_{\alpha\beta}$ von endlicher Ordnung. Die von den Elementen $U_{\alpha\beta}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{U}$ ist also endlich.

Um die Endlichkeit der Anzahl der übrigen Elemente zu beweisen, bezeichnen wir die Elemente $\overline{Q}_\alpha\,\mathfrak{U}$ der Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{U}$ mit $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Wegen (8.2) gilt:

$$S_\alpha S_\beta S_\alpha^{-1} = S_\gamma$$

für alle α, β, also auch

$$S_\alpha^a S_\beta^b S_\alpha^{-a} = S_\delta^b.$$

Durch wiederholte Anwendung solcher Relationen kann jedes Potenzprodukt der S_α so umgeformt werden, daß jedes S_i bloß einmal — mit irgend einem Exponenten — als Faktor darin auftritt. Da die Elemente S_α die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{U}$ erzeugen und nach (4'.2) endliche Ordnung besitzen, ist damit auch $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{U}$ als endlich erkannt, womit alles bewiesen ist.

(Es werden hier die Ideen von Herrn *W. Dyck* [6]) implizite benutzt; die Darstellung des Beweises verdanke ich Herrn *O. Schreier*.)

Man sieht leicht, daß die Voraussetzungen des Satzes 2, insbesondere die Bedingungen 2), 4) und 5), unentbehrlich für den Beweis der Endlichkeit von $\overline{\mathfrak{G}}$ sind. Braucht nämlich $\mathfrak{H}$ nicht im Zentrum von $\mathfrak{G}'$ enthalten zu sein, und ist $\mathfrak{G}$ etwa die zyklische Gruppe m-ter Ordnung, so befriedigt die metazyklische Gruppe $\mathfrak{G}'$ p-ten Grades und pm-ter Ordnung, wo p eine Primzahl vom Typus $mx + 1$ ist, alle übrigen Bedingungen des Satzes 2. Um dies zu beweisen, nehmen wir in $\mathfrak{G}$:

$$Q_1, Q_2 = Q_1^2; \quad Q'_1 = (x, gx + 1), \quad Q'_2 = (x, g^2 x + 1) \pmod p,$$

wo g eine primitive Wurzel der Kongruenz $x^m \equiv 1 \pmod p$ ist. Die Gesamtheit solcher Gruppen ist offenbar unendlich.

Lassen wir die Bedingung 4) fallen, so kann man als $\mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{G}$ wie oben) eine beliebige zyklische Gruppe mn-ter Ordnung nehmen, n beliebig ganz.

Braucht 5) nicht mehr zu gelten, so kann man als $\mathfrak{G}'$($\mathfrak{G}$ wie oben) ein direktes Produkt $\mathfrak{G} \times \mathfrak{M}$ nehmen, wo $\mathfrak{M}$ eine beliebige Gruppe ist.

---

[6]) *W. Dyck*, Gruppentheoretische Studien I. Math. Ann. 20. Vgl. auch *O. Schmidt*, Abstrakte Gruppentheorie. Kiew 1915 (russisch), S. 49—51.

Als Beispiel nehmen wir die symmetrische Permutationsgruppe von drei Dingen. Es seien $Q_1 = (23)$, $Q_2 = (31)$, $Q_3 = (12)$ die zu wählenden erzeugenden Substitutionen, und es seien $\alpha = Q_1' Q_2' Q_1' Q_3'$, $\beta = Q_2' Q_3' Q_2' Q_1'$, $\gamma = Q_3' Q_1' Q_3' Q_2'$ die erzeugenden Substitutionen von $\mathfrak{H}$. Es gilt $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$, $\alpha\beta\gamma = 1$, so daß $\mathfrak{H}$ die *Abel*sche Gruppe 4-ter Ordnung vom Typus $\{2, 2\}$ ist. $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$.

Eine ähnliche Aufgabe hat Herr *J. Schur* [7]) gelöst. Das vorstehende Beispiel zeigt, daß unsere Aufgabe nicht als Spezialfall der Aufgabe von Herrn *Schur* betrachtet werden kann.

§ 3. Allgemeines über Trägheitsgruppen von Klassenkörpern.

Es sei K ein Körper, dessen Klassenzahl durch eine Primzahl p teilbar sein möge. Ist $p = 2$, so fassen wir die Klassen im engeren Sinne auf, so daß die Klassenzahl stets gleich dem Relativgrad des Klassenkörpers (im Sinne: umfassendster relativ *Abel*scher unverzweigter Relativkörper) ist.

Wir wollen hier zwei Hilfsbegriffe einführen:

Definition 1. *Unter der Norm des Körpers K verstehe man den kleinsten normalen Körper, der K enthält.*

Definition 2. *Unter der Norm der Gruppe $\mathfrak{H}$, die Teiler einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, verstehe man den kleinsten Normalteiler von $\mathfrak{G}$, welcher $\mathfrak{H}$ enthält.*

Ich führe zwei bekannte Sätze an:

Satz 3. *Jedes Element der Norm von K kann durch Elemente von K und den mit K konjugierten Körpern dargestellt werden (Resolvente von Galois).*

Satz 4. *Jedes Element der Norm von $\mathfrak{H}$ kann durch Elemente von $\mathfrak{H}$ und den der mit $\mathfrak{H}$ konjugierten Gruppen dargestellt werden.*

Definition 3. *$\mathfrak{H}$ sei ein Normalteiler von $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{K}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}'$, so bedeute die Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$ die Gesamtheit derjenigen Nebengruppen $\mathfrak{H}S$, welche durch die Elemente von $\mathfrak{K}$ repräsentiert werden. Man bezeichne sie mit $\mathfrak{K}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$.*

Satz 5. *$\mathfrak{K}$ ist mit $\mathfrak{K}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ isomorph (im allgemeinen mehrstufig). Der Quotient der Ordnungen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ ist gleich der Ordnung des Durchschnittes $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{J} + \mathfrak{J}S_2 + \cdots + \mathfrak{J}S_\nu \tag{1.3}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{J}$. $\mathfrak{J}$ wird in die Einheit von $\mathfrak{G}$ abgebildet. Würden etwa S_i und S_k in dasselbe Element von $\mathfrak{G}$ abgebildet, so würde $S_i S_k^{-1}$ in 1 abgebildet. $S_i S_k^{-1}$ muß demnach in $\mathfrak{H}$ und also in $\mathfrak{J}$ enthalten sein, was mit der Zerlegung (1.3) im Widerspruch steht.

Satz 6. *Die Norm einer Abbildung ist gleich der Abbildung der Norm.*

Beweis. 1. Die Abbildung eines Teilers einer Gruppe ist Teiler ihrer Abbildung.

2. Ist $\mathfrak{K}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}'$, so ist die Abbildung von $\mathfrak{K}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

3. Ist andererseits $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}S_2 + \cdots + \mathfrak{H}S_\nu$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist das Kompositum $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}, S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}'$. Die Abbildung von $\mathfrak{K}$ ist $\overline{\mathfrak{K}}$, und jede Untergruppe von $\mathfrak{G}'$, deren Abbildung Teiler von $\overline{\mathfrak{K}}$ ist, ist Teiler von $\mathfrak{K}$, da sie nur Elemente vom Typus $H_\mu, H_\mu S_2, \ldots, H_\mu S_\nu$ besitzt, wo H die Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft. Demnach wird der kleinste die Gruppe $\mathfrak{K}$ enthaltende Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ in den kleinsten die Abbildung von $\mathfrak{K}$ enthaltenden Normalteiler von $\mathfrak{G}$ abgebildet, w. z. b. w.

---

[7]) *J. Schur*, Über die Darstellung der endlichen Gruppen usw. Dieses Journal **127** und **132**, insbes. **132**, S. 85.

Satz 7. *Es sei K' ein normaler Körper, $\mathfrak{G}'$ seine Gruppe, $\mathfrak{T}$ eine seiner Trägheitsgruppen, sie entspreche dem Primideal $\mathfrak{P}$. Ferner sei K ein normaler Unterkörper von K', der zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehöre, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ seine Gruppe. Ist $\mathfrak{p}$ das $\mathfrak{P}$ enthaltende Primideal von K, so ist die Trägheitsgruppe $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{p}$ gleich der Abbildung $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ ist die Gesamtheit der Substitutionen S, die jede Größe α von K' modulo $\mathfrak{P}$ nicht ändern:

$$\alpha^S \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Üben wir S auf eine Größe β von K, so gilt:

$$\beta^S \equiv \beta \pmod{\mathfrak{P}} \text{ und also } \beta^S \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Demach ist $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{t}$ enthalten.

Ist K_t' der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}$, so ist das $\mathfrak{P}$ enthaltene Primideal von $\mathfrak{K}_t'$ nicht kritisch in K_t'. Dasselbe gilt offenbar vom Körper K_{th}, der zu $\mathfrak{T}\mathfrak{H}$ in K' (und also zu $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ in K) gehört, da K_{th} Unterkörper von K_t' ist. Daraus folgt aber nach dem Satz 1, daß $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ die Trägheitsgruppe $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{p}$ enthält. Also gilt $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H} = \mathfrak{t}$.

Aus den Sätzen 6 und 7 folgt der

Satz 8. *Die Abbildung einer Trägheitsgruppennorm von K' auf $\mathfrak{G}$ ist die entsprechende Trägheitsgruppennorm von K.*

Satz 9. *Ist K' relativ unverzweigt über K, so ist $\mathfrak{H}$ relativ prim zu jeder Trägheitsgruppe von K'.*

Beweis. Ist K' relativ unverzweigt über K, so ist die Ordnung jeder Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ von K' gleich der Ordnung der entsprechenden Trägheitsgruppe von K, da die Ordnung der Trägheitsgruppe gleich dem Exponenten ist, zu welchem das entsprechende Primideal in p aufgeht. Aus dem Satz 7 folgt, daß $\mathfrak{T}$ mit ihrer Abbildung auf $\mathfrak{G}$ einstufig isomorph ist. Daraus aber folgt nach Satz 5, daß $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{H}$ relativ prim ist.

Die Sätze 7, 8, 9 lassen sich auf Relativkörper erweitern, indem wir einen beliebigen Körper als Rationalitätsbereich nehmen. Versteht man hier unter „Trägheitsgruppe" eine Relativträgheitsgruppe in bezug auf den Rationalitätsbereich, und ersetzt man p durch ein Primideal des Rationalitätsbereichs, so bleiben alle Überlegungen unverändert.

Wir wollen die Teilklassenkörper und entsprechenden Klassenzahlfaktoren in 4 Arten je nach der Struktur der entsprechenden Gruppen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{H}$ einteilen.

Definition 4. *Es sei $\mathfrak{N}$ die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ derart, daß ihre Elemente mit allen Elementen von $\mathfrak{H}$ vertauschbar sind. K_n sei der zu $\mathfrak{N}$ gehörende Körper.*

I. *Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, dann nennen wir den entsprechenden elementaren (absolut normalen) Teilklassenkörper K_p (und den zugehörigen Klassenzahlfaktor $p^{\mu\nu}$) eigentlich.*

II. *Ist $\mathfrak{N} > \mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{H}$ relativ prim zu dem Kompositum $\mathfrak{M}$ sämtlicher Relativträgheitsgruppen von K_p in bezug auf K_n, dann nennen wir K_p und $p^{\mu\nu}$ uneigentlich.*

III. *Ist $\mathfrak{N} > \mathfrak{H}$ und besitzt K_p (nicht notwendig elementar) eine Relativträgheitsgruppe $\mathfrak{T}'$ in bezug auf K_n, deren Norm $\mathfrak{T}$ (in bezug auf $\mathfrak{N}$) nicht relativ prim zu $\mathfrak{H}$ ist, dann nennen wir K_p und $p^{\mu\nu}$ zentral.*

IV. *Ist $\mathfrak{N} > \mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{M}$ nicht zu $\mathfrak{H}$ relativ prim, während jede der in* III *besprochenen Normen $\mathfrak{T}$ relativ prim zu $\mathfrak{H}$ ist, dann nennen wir $p^{\mu\nu}$ Geschlechterklassenzahlfaktor.*

Eine und dieselbe Primzahl p kann offenbar in verschiedenen Klassenzahlfaktoren aufgehen.

§ 4. Eigentliche Klassenzahlfaktoren.

Im Falle $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$ bewirkt jede Transformation der Gruppe $\mathfrak{H}$ mittels einer Substitution der Gruppe $\mathfrak{G} \leftrightarrow \mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ eine wirkliche Vertauschung unter den Elementen von $\mathfrak{H}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also Teiler des Holomorphs, d. h. der Gruppe aller äußeren Automorphismen von $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}$ *Abel*sch vom ν-gliedrigen Typus $\{p, p, \ldots, p\}$, so ist $\mathfrak{G}$ einstufig isomorph mit einer Kongruenzgruppe homogener ganzzahliger linearer Substitutionen von ν Variabeln modulo p. Ist dagegen $\mu \neq 1$, so läßt $\mathfrak{G}$ eine etwas kompliziertere Darstellung zu [9]).

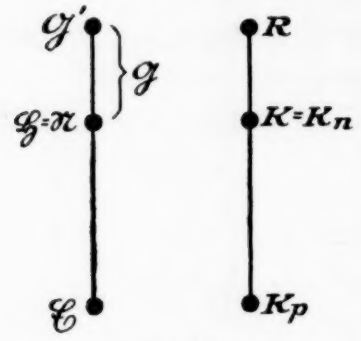

Fig. 1. [8]).

Wir betrachten genauer den Fall $\mu = 1$. Es gibt stets einen absolut normalen Unterkörper von K_p, dessen Relativgruppe vom ν-gliedrigen Typus $\{p, p, \ldots, p\}$ ist. (Dieser Teilklassenkörper braucht jedoch wohl nicht eigentlich zu sein). Ist er eigentlich, so schließen wir, daß die Ordnung g der Gruppe $\mathfrak{G}$ Teiler von

$$(1.4) \qquad (p^\nu - 1)(p^\nu - p)\cdots(p^\nu - p^{\nu-1})$$

ist. Dies zieht eine Beschränkung für p und ν nach sich.

Ist insbesondere $\nu = 1$, d. h. ist der Klassenkörper K_p' p-ten Relativgrades über K absolut normal, so muß die Gruppe $\mathfrak{G}$ zyklisch sein, und es gilt:

$$(2.4) \qquad p \equiv 1 \pmod{g}.$$

Dieser Fall kommt also nur bei Kreiskörpern vor.

Eine weitere Beschränkung für p und ν folgt daraus, daß die erwähnte Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Kongruenzgruppe modulo p unzerfällbar [10]) im Körper der rationalen Reste modulo p sein muß. Denn ist diese Gruppe reduzibel [10]), so existieren $\mu(\mu < \nu)$ modulo p linear unabhängige ganzzahlige lineare Funktionen

$$y_1 = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{i\nu}x_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

die durch die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ nur unter sich substituiert werden. Damit ist die durch die Basis

$$B_i = A_1^{a_{i1}} A_2^{a_{i2}} \cdots A_\nu^{a_{i\nu}},$$

wo $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ eine Basis von $\mathfrak{H}$ ist, dargestellte Gruppe ein in $\mathfrak{H}$ enthaltener Normalteiler von $\mathfrak{G}'$.

Ist die Gruppe zerfällbar (vollständig reduzibel), so gibt es also zwei relativ prime Teiler von $\mathfrak{H}$, deren Produkt die ganze Gruppe $\mathfrak{H}$ reproduziert, und von denen jede Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist. Die zu diesen Gruppen innerhalb K_p gehörenden Körper sind absolut normal, haben K zum Durchschnitt und erzeugen durch Komposition den Körper

---

[8]) In allen hier beigegebenen Figuren bedeutet jeder Punkt auf der linken Seite eine Gruppe. In jeder Verbindungslinie dieser Punkte bedeutet der obere Punkt eine Obergruppe, der untere Punkt eine Untergruppe. Der gleichgestellte Punkt auf der rechten Seite bedeutet den Körper, welcher zu dieser Gruppe gehört.

Diese graphische Darstellung habe ich nach dem Rate von Herrn *Hasse* eingeführt. Vgl. *H. Hasse*, Höhere Algebra 2. Berlin 1927, S. 103 u. 122/23.

[9]) Vgl. *A. Speiser*, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2. Aufl. Berlin 1927, S. 130—131, Sätze 112, 113.

[10]) Diese Terminologie ist aus einer Arbeit von Herrn *J. Schur*: Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Sitzber. Berl. Akad. 1928, S. 100, genommen.

K_p. Ihre Existenz ist aber durch die Feststellung widerlegt, daß K_p ein elementarer absolut normaler Körper ist [11]).

Aus der Definition des Elementarkörpers folgt, daß (im Falle $\mu = 1$) jeder Elementarkörper durch Komposition von konjugierten Körpern vom Relativgrade p über K erzeugt werden kann. Dies besagt, daß $\mathfrak{H}$ einen Teiler $\mathfrak{H}_1$ von der Ordnung $p^{\nu-1}$ besitzt, der keinen Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ als Teiler enthält. Ist $\mathfrak{H} = A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_\nu^{x_\nu}$ ($x_i = 0, 1, \ldots, p-1$; $i = 1, 2, \ldots, \nu$), so besteht jede Untergruppe von $\mathfrak{H}$ von der Ordnung $p^{\nu-1}$ aus den Elementen $A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_\nu^{x_\nu}$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ einer gewissen Kongruenz

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_\nu x_\nu \equiv 0 \pmod{p} \tag{3.4}$$

unterworfen sind. Der Durchschnitt von $\mathfrak{H}_1$ und seinen Konjugierten besteht aus den Elementen $A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_\nu^{x_\nu}$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ den höchstens g unabhängigen Bedingungen vom Typus (3.4) unterworfen sind. Da dieses Kongruenzensystem, unserer Voraussetzung zufolge, nur die triviale Lösung $x_i \equiv 0 \pmod{p}$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu$) zulassen darf, so folgt daraus:

$$\nu \leqq g.$$

Wir nehmen nun an, es sei $\nu = g$. Dann müssen die linken Seiten von (3.4), die den sämtlichen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ entsprechen, modulo p linear unabhängig sein. Daraus folgt, daß der Durchschnitt $\mathfrak{h}_1$ der $\nu - 1$ mit $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Gruppen die Ordnung p hat, da die ihm entsprechenden $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ $\nu - 1$ unabhängigen Bedingungen vom Typus (3.4) genügen. Das Kompositum sämtlicher mit $\mathfrak{h}_1$ konjugierter Gruppen ist gleich $\mathfrak{H}$, da die ihm entsprechenden $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ von allen Bedingungen (3.4) befreit sind. (Wir beachten, daß die dem Kompositum von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ entsprechenden $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ allen und nur denjenigen Bedingungen genügen, die durch lineare Komposition aus den $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ entsprechenden Bedingungen entstehen.) Somit wird $\mathfrak{H}$ durch eine ν-gliedrige Basis $A_1, S_1 A_1 S_1^{-1}, S_2 A_1 S_2^{-1}, \ldots, S_{\nu-1} A_1 S_{\nu-1}^{-1}$ dargestellt, wobei A_1 eine erzeugende Substitution von $\mathfrak{h}_1$ ist und $1, S_1, S_2, \ldots, S_{\nu-1}$ sämtliche Substitutionen von $\mathfrak{G}$ bedeuten. Üben wir auf das System $A_1, S_1 A_1 S_1^{-1}, \ldots, S_{\nu-1} A_1 S_{\nu-1}^{-1}$ eine Substitution von $\mathfrak{G}$ aus, so erleidet es eine Permutation, so daß $\mathfrak{G}$ als eine transitive Permutationsgruppe von ν Symbolen dargestellt werden kann. Nun ist jede Permutationsgruppe zerfällbar [12]), und zwar besitzt sie einen Bestandteil ersten Grades, der der identischen Darstellung entspricht. Der übrigbleibende Bestandteil ist dann ebenfalls rational und also (vgl. *Speiser*, loc. cit. [Anm. 9] Satz 184, S. 206) durch ganzzahlige Matrizen darstellbar. Fassen wir diese Darstellung als eine Kongruenzgruppe modulo p auf, so erzeugt sie wieder die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$, nur der Fall $p = 2$, $\nu = 2$ ausgenommen (*Speiser*, loc. cit. [Anm. 9] Satz 187, S. 209). Demnach zerfällt $\mathfrak{H}$ in zwei relativ prime Faktoren, von denen jeder Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist, was unserer Voraussetzung widerspricht. Also gilt:

$$\nu < g. \tag{4.4}$$

Den einzigen Ausnahmefall bietet die Doppelkegelgruppe 8-ter Ordnung:

---

[11]) Eine reduzible Gruppe ist hier nicht notwendig zerfällbar, wie mir Herr *O. Schreier* an dem Beispiel der durch die Relationen

$$A^p = B^p = \Theta^p = 1, \quad \Theta A \Theta^{-1} = A, \quad \Theta B \Theta^{-1} = AB$$

(vgl. *O. Hölder*, Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4. Math Ann. **43** (1893), S. 383, 10. Zeile von oben) definierten Gruppe p^3-ter Ordnung erläutert hat. Dies ist notwendig der Fall, wenn die Ordnung von $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ zu p relativ prim ist, wie dies aus den Formeln von Herrn *J. Schur* folgt, die im Nenner die Ordnung von $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ enthalten (*J. Schur*, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzber. Berl. Akad. 1905, S. 415, 3. Zeile von unten).

[12]) *Burnside*, Theory of groups of finite order. 2. ed. Cambridge 1912, p. 275. Vgl. auch *O. Schmidt*, loc. cit. [Anm. 6] S. 191.

$\mathfrak{H} = \{A, B\}$, $AB = BA$, $A^2 = B^2 = 1$; $\mathfrak{G}' = \{A, B, \Theta\}$, $\Theta^2 = 1$, $\Theta A \Theta^{-1} = A$, $\Theta B \Theta^{-1} = BA$. Hier ist $p = 2$, $\nu = g = 2$.

Mit diesen Darstellungen der Gruppen von Klassenkörpern beschäftigte sich auch Herr *Speiser* (loc. cit. [Anm. 9] S. 239).

Bei speziellen Gruppen $\mathfrak{G}$ kann man auch schärfere Abschätzungen für ν erhalten.

Derselben Primzahl können bei festem Körper K offenbar mehrere elementare Klassenkörper entsprechen, die sowohl von ein- und derselben „Art" als auch von verschiedenen „Arten" sein können. Außerdem kann die Art der Zerlegung des Klassenkörpers in Elementarkörper nicht eindeutig sein. Die Ungleichung (4.4) kann also nicht als Beschränkung betrachtet werden für die Potenz, in welcher p in der Klassenzahl von K enthalten ist.

Somit kommen wir zu den folgenden Sätzen:

Satz 10. *Ist K_p ein eigentlicher elementarer absolut normaler Teilklassenkörper über K, dessen Relativgruppe vom ν-gliedrigen Typus $\{p, p, \ldots, p\}$ ist, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ von K mit einer nicht zerfällbaren Gruppe homogener ganzzahliger linearer Substitutionen von ν Variabeln modulo p einstufig isomorph.*

Satz 11. *Soll eine Primzahl p in der Klassenzahl eines normalen Körpers K in der ersten Potenz als eigentlicher Faktor auftreten, so ist K ein Kreiskörper, dessen Grad Teiler von $p - 1$ ist.*

Bemerkung. Man kann das Vorstehende verallgemeinern, indem man die Rolle von $\mathfrak{H}$ irgendeiner Gruppe erteilt, die einem über K unverzweigten Körper an Stelle von K_p als *Galois*sche Relativgruppe entspricht. Dann muß $\mathfrak{G}$ als Teiler des Holomorphs von $\mathfrak{H}$ dargestellt werden. In diesem Falle ist aber die Untersuchung viel komplizierter, da wir bis jetzt kein analytisches Verfahren zur Darstellung des Holomorphs bei allgemeineren Gruppen kennen.

§ 5. Uneigentliche Klassenzahlfaktoren.

Wir betrachten nun den Fall, daß es in $\mathfrak{G}'$ außer $\mathfrak{H}$ Substitutionen gibt, die mit allen Substitutionen von $\mathfrak{H}$ vertauschbar sind. Diese Substitutionen bilden eine Gruppe $\mathfrak{N}$, welche Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ist mit einer Gruppe äußerer Automorphismen von $\mathfrak{H}$ einstufig isomorph.

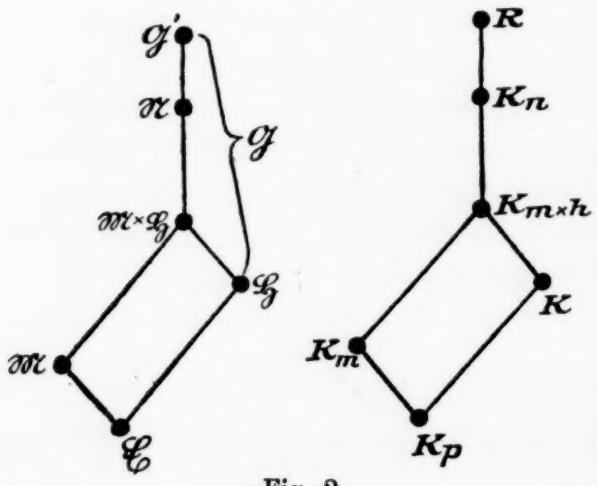

Fig. 2.

Wir bilden alle Trägheitsgruppen von K_p in bezug auf den Körper K_n, der in K_p zu $\mathfrak{N}$ gehört. Diese Trägheitsgruppen erzeugen zusammen die Gruppe $\mathfrak{M}$, zu welcher nach dem Satz 1a der umfassendste über K_n unverzweigte Teilkörper K_m von K_p gehört.

In unserem Falle ist $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{H}$ relativ prim. Das Produkt $\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$ ist direkt und in $\mathfrak{N}$ enthalten. K_p entsteht durch Komposition aus den zwei Körpern K_m und K, die in K_p bzw. zu $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ gehören und die den Durchschnitt $K_{m\times h}$ haben, der in K_p zu $\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$ gehört. Der Relativkörper K_p über $K_{m\times h}$ zerfällt in zwei teilerfremde Relativkörper über $K_{m\times h}$: 1) $K_h = K$; 2) K_m, dessen Relativgruppe über $K_{m\times h}$ *Abel*sch und unverzweigt ist, also ein Klassenkörper. $p^{\mu\nu}$ ist also Klassenzahlfaktor des niedrigeren Körpers $K_{m\times h}$. Die ihm entsprechende Gruppe $\mathfrak{N}$ ist mit $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$ einstufig isomorph. Denn jedes Element von $\mathfrak{G}'/\mathfrak{M}_1$ das mit jedem Element von $\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ vertauschbar ist, entspricht einem Element

S von $\mathfrak{G}'$, das mit jedem Element H von $\mathfrak{H}$ in einer Relation $SHS^{-1} = HM$, steht wobei M ein ein Element von $\mathfrak{M}$ ist. Da aber SHS^{-1} in $\mathfrak{H}$ enthalten ist und da $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{H}$ relativ prim ist, gilt notwendig $M = 1$, d. h. S ist mit H vertauschbar.

Fällt $\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{N}$ zusammen, so sind wir zu dem Fall eines eigentlichen Klassenzahlfaktors gekommen.

Andernfalls haben wir den Fall eines uneigentlichen Klassenzahlfaktors mit $\mathfrak{M} = 1$. Dann ist K_p über K_n unverzweigt. Ist dabei $\mathfrak{N}$ *Abel*sch, so ist K_p Klassenkörper in bezug auf K_n. Jedenfalls ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ im Holomorph von $\mathfrak{N}$ enthalten, da es in $\mathfrak{G}'$ außer $\mathfrak{N}$ keine Substitution gibt, die mit jeder Substitution von $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist, also erst recht keine, die mit jeder Substitution von $\mathfrak{N}$ vertauschbar ist. Hier kommt also die „Bemerkung" des § 4 in Frage. Ist $\mathfrak{N}$ auflösbar, so ist K_p ein Klassenkörperturm über K_n [13]).

Wir kommen hiermit zu dem folgenden Satz:

Satz 12. *Ist K_p ein uneigentlicher elementarer absolut normaler Teilklassenkörper über K, so besitzt sein Unterkörper $K_{m\times h}$ auch einen Klassenkörper K_m mit einer Relativgruppe, die zu der Relativgruppe von K_p über K einstufig isomorph ist. Dieser Klassenkörper ist eigentlich oder uneigentlich, je nachdem die in der Definition 4 eingeführten Gruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$ zusammenfallen oder nicht.*

Der zu $\mathfrak{M}$ gehörende K_m ist über K_n unverzweigt. Die Galoissche Gruppe von K_n ist im Holomorph der Gruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{M}$ enthalten.

§ 6. Zentrale Klassenzahlfaktoren.

In diesem Falle gibt es in K_p eine Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}'$ in bezug auf $\mathfrak{N}$, deren Norm $\mathfrak{T}$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ einen von 1 verschiedenen Teiler $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{H}$ enthält. Ist $\mathfrak{h}$ der größte Teiler von $\mathfrak{H}$, welcher in $\mathfrak{T}$ enthalten ist, so ist $\mathfrak{h}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}$ und also auch von $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{h}$ ist im Zentrum von $\mathfrak{T}$ enthalten und ist nach dem Satz 9 zu $\mathfrak{T}'$ relativ prim. Die Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{T}/\mathfrak{h}$ sind Normalteiler von $\mathfrak{N}/\mathfrak{h}$ und relativ prim, also enthält $\mathfrak{N}/\mathfrak{h}$ das direkte Produkt $\mathfrak{H}/\mathfrak{h} \times \mathfrak{T}/\mathfrak{h}$. Daher besitzt $\mathfrak{N}/\mathfrak{h}\,/\,\mathfrak{H}/\mathfrak{h} = \mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ eine Untergruppe $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$, die mit $\mathfrak{T}/\mathfrak{h}$ einstufig isomorph ist, also ist $\mathfrak{T}/\mathfrak{h}$ mit einem Teiler von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$ einstufig isomorph.

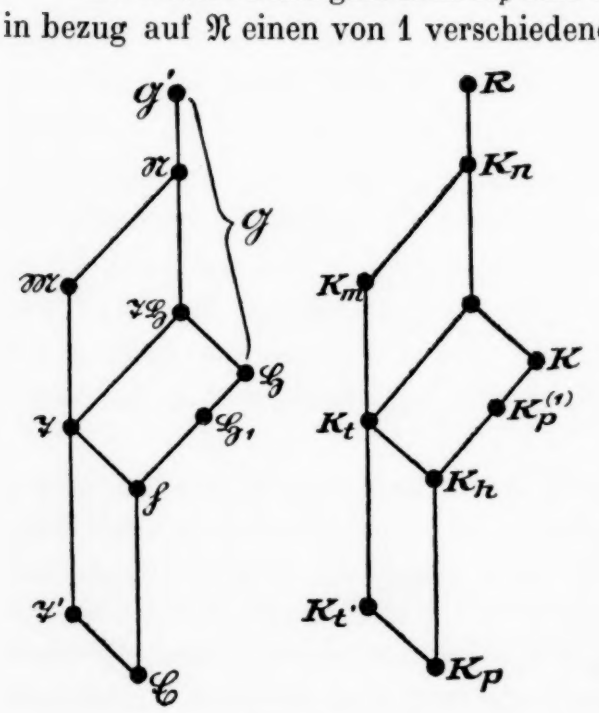

Fig. 3.

Nun zerlegen wir $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{H}$:

$$(1.6) \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}F_2 + \cdots + \mathfrak{H}F_k.$$

$k = (\mathfrak{N} : \mathfrak{H})$ ist gleich der Ordnung einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$, d. h. hängt nur von $\mathfrak{G}$ ab. Jedes Element derselben Nebengruppe von (1.6) transformiert $\mathfrak{T}'$ in dieselbe Gruppe, da $\mathfrak{H}$ im Zentrum von $\mathfrak{N}$ enthalten ist. Die Anzahl der mit der Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}'$ (in bezug auf $\mathfrak{N}$) konjugierten Gruppen ist also Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$. Da andererseits die Gruppe $\mathfrak{T}'$ nach Satz 7 und Satz 5 mit der entsprechenden Trägheitsgruppe von K einstufig isomorph ist, die ihrerseits ein Teiler von $\mathfrak{G}$ ist, kann man in $\mathfrak{T}'$ eine Anzahl von Elementen $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_a$ wählen, die die ganze Gruppe $\mathfrak{T}'$ erzeugen,

---

[13]) *H. Hasse*, Bericht über neuere usw. Teil I. Klassenkörpertheorie. Jahresbericht d. D. M.-V **35**, S. 46—47.

wobei α nur von $\mathfrak{G}$ abhängt. Die Ordnungen von $Q_1', Q_2', \ldots, Q_a'$ sind offenbar gleich den Ordnungen der Elemente $Q_1, Q_2, \ldots, Q_a$ aus $\mathfrak{G}$, die bei der Abbildung $\mathfrak{T}' \to \mathfrak{T}'\mathfrak{H}/\mathfrak{H} = \mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ den $Q_1', Q_2', \ldots, Q_a'$ in $\mathfrak{G}'$ entsprechen. Bilden wir das System $Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$ aller zu letzteren in bezug auf $\mathfrak{N}$ konjugierten Elemente, so hängt m auch nur von $\mathfrak{G}$ ab. Dieses System erzeugt aber durch Komposition die ganze Gruppe $\mathfrak{T}$, da $\mathfrak{T}$ die Norm von $\mathfrak{T}'$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ ist.

Vergleichen wir diese Tatsachen mit den Bedingungen des Satzes 2, indem wir die Bezeichnungen folgendermaßen gegenseitig zuordnen:

im Satz 2:	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{G}'$	$\mathfrak{H}$	$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$	$Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$
hier:	$\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{h}$	$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$	$Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$

so sehen wir, daß hier alle Bedingungen des Satzes 2 befriedigt sind. (Wir brauchen uns dabei nicht darum zu kümmern, daß eventuell einige der Elemente $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ zusammenfallen). Somit sind alle möglichen Gruppen $\mathfrak{h}$ völlig durch die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt. Die Anzahl der mit $\mathfrak{h}$ in bezug auf $\mathfrak{G}'$ konjugierten Gruppen hängt auch nur von $\mathfrak{G}$ ab, woraus folgt, daß die Ordnung der Norm $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{h}$ in bezug auf $\mathfrak{G}'$ nur von $\mathfrak{G}$ abhängt.

Nun betrachten wir den zu $\mathfrak{H}_1$ innerhalb K_p gehörenden Körper $K_p^{(1)}$. Es kann geschehen, daß der Normalisator $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{H}_1$ sämtlicher Elemente von $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_1$ größer als $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}_1$ ist. Dann kann $K_p^{(1)}$ zentraler Teilklassenkörper über K sein. Fahren wir so fort, so kommen wir nach einer nur von $\mathfrak{G}$ abhängigen Anzahl a von Schritten (a ist nicht größer als die Anzahl Glieder in einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$) zu einem Körper $K_p^{(a)}$, dessen Relativgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_a$ einen Normalisator $\mathfrak{N}_a/\mathfrak{H}_a$ aller seiner Elemente hat, der gleich $\mathfrak{N}_{a-1}/\mathfrak{H}_a$ ist. Dann behaupten wir, daß $K_p^{(a)}$ nicht zentraler Teilklassenkörper in Bezug auf seine Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}_{a-1}'\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_a$ ist (s. den Satz 7). Denn entspricht der Relativgruppe $\mathfrak{T}_{a-1}'$ in bezug auf $K_p^{(a-1)}$ ein Primideal $\mathfrak{P}_{a-1}$ von $K_p^{(a-1)}$, so entspricht dem Primideal $\mathfrak{P}_a$ innerhalb $K_p^{(a)}$, welches $\mathfrak{P}_{a-1}$ umfaßt, die Relativträgheitsgruppe $\mathfrak{T}_a'$, die zu $\mathfrak{T}_{a-1}'$ nach Satz 7 durch die Abbildung $\mathfrak{N}_a/\mathfrak{H}_{a-1} \to \mathfrak{N}_a/\mathfrak{H}_a$ zugeordnet und mit $\mathfrak{T}_{a-1}'$ einstufig isomorph ist, da $K_p^{(a-1)}$ unverzweigt über $K_p^{(a)}$ ist. Daher ist die Norm $\mathfrak{T}_a$ von $\mathfrak{T}_a'$ in bezug auf $\mathfrak{N}_a/\mathfrak{H}_a$ nach Satz 8 gleich der Abbildung $\mathfrak{T}_{a-1}\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_a$ von $\mathfrak{T}_{a-1}$ auf $\mathfrak{N}_a/\mathfrak{H}_a$, wobei $\mathfrak{T}_{a-1}$ die Norm von $\mathfrak{T}_{a-1}'$ in bezug auf $\mathfrak{N}_{a-1}/\mathfrak{H}_{a-1} = \mathfrak{N}_a/\mathfrak{H}_{a-1}$ ist. Da aber $\mathfrak{T}_{a-1}$ mit $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{a-1}$ nur den Durchnitt $\mathfrak{h}_{a-1}$ hat, welcher Teiler von $\mathfrak{H}_a$ ist, so sind $\mathfrak{T}_{a-1}\mathfrak{H}_a/\mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_a$ relativ prim, w. z. b. w.

Wenn wir in der Rolle von $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ alle Normalteiler von $\mathfrak{G}$ der Reihe nach nehmen und für jedes Gruppenpaar ($\mathfrak{T}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ soll dabei Teiler von $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ sein) die obige Konstruktion unternehmen, indem wir $Q_1', Q_2', \ldots, Q_m'$ allen möglichen Kombinationen mit Wiederholungen der Elemente von $\mathfrak{T}/\mathfrak{H}$ zuordnen (mit der Bedingung, daß hierin mit einem Element Q_i' auch alle seine in bezug auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ Konjugierten vorkommen; die obere Grenze von m hängt nur von $\mathfrak{G}$ ab), so sind dadurch alle möglichen Gruppen $\mathfrak{h}$ erschöpft, die den zentralen Teilklassenkörpern mit irgendwelchen $\mathfrak{T}'$ entsprechen können. Daraus folgt der

Satz 13. *Alle möglichen Gruppen $\mathfrak{H}$, die den zentralen Klassenzahlfaktoren entsprechen, sind völlig durch die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt* [14]).

Beim Beweise zogen wir gar nicht in Betracht, daß K_p ein Elementarkörper ist. Wir dürfen demnach annehmen, K_p sei der volle Klassenkörper von K. Ist $\overline{K}$ der umfassendste

[14]) Die Anzahl möglicher *Abel*scher Gruppen bei gegebener Ordnung ist offenbar beschränkt.

zentrale Teilklassenkörper über K und ist $\bar{K}^{(a)}$ der umfassendste nicht über K zentrale Unterkörper von $\bar{K}$, so ist der maximale Relativgrad von $\bar{K}$ über $\bar{K}^{(a)}$ durch die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}$ von K bestimmt. Dieselbe Bemerkung gilt auch von den Geschlechterklassenzahlfaktoren (§ 7).

Satz 14. *Die zentralen Klassenzahlfaktoren kommen bei zyklischen Körpern nicht vor.*

Beweis. $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$ sei zyklisch, $\mathfrak{H}$ sei im Zentrum von $\mathfrak{N}$ enthalten. $\mathfrak{N}$ läßt sich folgendermaßen nach $\mathfrak{H}$ zerlegen:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}S + \cdots + \mathfrak{H}S^{m-1},$$

m sei die Ordnung von $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$. Sind $U = H_1 S^i$, $V = H_2 S^j$ zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{N}$, so gilt:

$$UV = H_1 H_2 S^{i+j} = VU,$$

d. h. $\mathfrak{N}$ ist *Abel*sch. Dann ist $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}$, was unmöglich ist, da $\mathfrak{T}'$ nach Satz 9 zu $\mathfrak{H}$ relativ prim und $\mathfrak{T}$ nicht zu $\mathfrak{H}$ relativ prim sein muß.

§ 7. Geschlechterklassenzahlfaktoren.

In diesem Falle gibt es keine Relativträgheitsgruppe, deren Norm (in bezug auf $\mathfrak{N}$) nicht zu $\mathfrak{H}$ relativ prim ist, während das Kompositum $\mathfrak{M}$ sämtlicher Relativträgheitsgruppen mit $\mathfrak{H}$ einen von 1 verschiedenen Durchschnitt $\mathfrak{H}_1$ hat. Da aber $\mathfrak{M}$ offenbar ein Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist, ist es auch von $\mathfrak{H}_1$ der Fall.

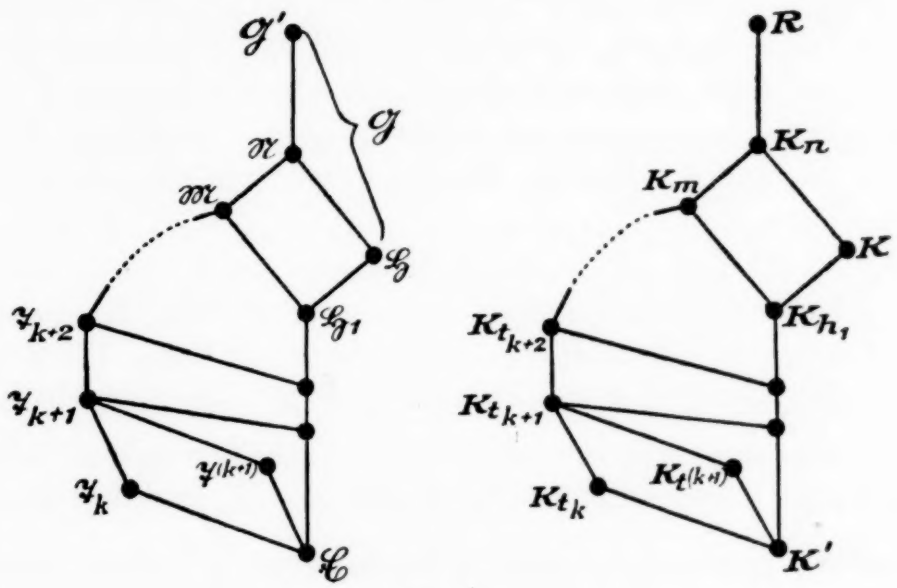

Fig. 4.

Wir nehmen alle Trägheitsgruppennormen $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots, \mathfrak{T}^{(a)}$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ in irgendeiner Reihenfolge und bilden die Gruppen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_a$, wobei $\mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}\mathfrak{T}' \cdots \mathfrak{T}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, a)$ das Kompositum von $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \ldots \mathfrak{T}^{(k)}$ bedeutet.

Da am Ende der Reihe $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \ldots$ die Gruppe $\mathfrak{M}$ steht, welche nach obigem $\mathfrak{H}_1$ enthält, so gibt es ein solches $\mathfrak{T}_k$, welches zu $\mathfrak{H}_1$ relativ prim ist, während alle $\mathfrak{T}_k\mathfrak{T}^{(k+1)}$, $\mathfrak{T}_k\mathfrak{T}^{(k+2)}, \ldots, \mathfrak{T}_k\mathfrak{T}^{(a)}$ nicht zu $\mathfrak{H}_1$ relativ prim sind. (Hierzu müssen wir, wenn das nötig ist, die Reihenfolge von $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \ldots, \mathfrak{T}^{(a)}$ verändern).

Nun betrachten wir die Abbildungen $\mathfrak{H}_1\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$, $\mathfrak{T}^{(k+1)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k, \ldots, \mathfrak{T}^{(a)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$ von $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{T}^{(k+1)}, \ldots, \mathfrak{T}^{(a)}$ auf $\mathfrak{N}\mathfrak{T}_k$. $\mathfrak{H}_1\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$ ist nach Satz 5 von derselben Ordnung wie $\mathfrak{H}_1$, da $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{T}_k$ relativ prim sind. Das Kompositum $\mathfrak{T}^{(k+1)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k \cdot \mathfrak{T}^{(k+2)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k \cdots \mathfrak{T}^{(a)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$

enthält aber $\mathfrak{H}_1\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$. Daraus folgt, daß die Ordnung von $\mathfrak{H}_1$ ein Teiler des Produkts der Ordnungen von $\mathfrak{T}^{(k+1)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$, $\mathfrak{T}^{(k+2)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k, \ldots, \mathfrak{T}^{(a)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$ (und a fortiori von $\mathfrak{T}^{(k+1)}$, $\mathfrak{T}^{(k+2)}, \ldots, \mathfrak{T}^{(a)}$) ist.

Wir wollen beweisen, daß jede der Gruppen $\mathfrak{T}^{(i)}$ $(i = k+1, \ldots, a)$ eine Faktorgruppe enthält, von der ein Teiler $\overline{\mathfrak{h}}_i$ mit einem Kompositionsfaktor $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i-1}$ von $\mathfrak{H}_1$ einstufig isomorph ist, so daß $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{H}_1$ ist. Dazu beachten wir, daß jedes $\mathfrak{T}^{(i)}\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$ $(i = k+1, \ldots, \alpha)$ einen Teiler von $\mathfrak{H}_1\mathfrak{T}_k/\mathfrak{T}_k$ enthält. E ssei $\overline{\mathfrak{h}}_{k+1}$ dieser Teiler für $i = k+1$. Er ist Normalteiler von $\mathfrak{N}/\mathfrak{T}_k$. Dann muß weiter $\mathfrak{T}^{(k+2)}\mathfrak{T}_{k+1}/\mathfrak{T}_{k+1}$ einen Teiler von $\mathfrak{H}_1\mathfrak{T}_{k+1}/\mathfrak{T}_{k+1}$ enthalten, welcher mit einem Teiler $\mathfrak{h}_{k+2}/\mathfrak{h}_{k+1}$ von $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{h}_{k+1}$ einstufig isomorph ist. Fahren wir so fort, so kommen wir endlich zu $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{h}_{a-1}$. Denn andernfalls wäre $\mathfrak{H}_1$ nicht in $\mathfrak{T}_a = \mathfrak{M}$ enthalten.

Da $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{T}^{(i)}$ relativ prim sind, so ist die Abbildung $\mathfrak{t}^{(i)} = \mathfrak{T}^{(i)}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{T}^{(i)}$ auf $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{T}^{(i)}$ einstufig isomorph. $\mathfrak{t}^{(i)}$ ist aber nach Satz 8 eine der Relativträgheitsgruppennormen des Körpers K in bezug auf K_n. $\mathfrak{H}_1$ ist demnach in eine Kette von Faktorgruppen zerlegbar, deren jedes Glied mit einem Teiler einer Faktorgruppe einer Trägheitsgruppennorm $\mathfrak{t}^{(i)}$ von K einstufig isomorph ist. Die Ordnung von $\mathfrak{H}_1$ braucht aber nicht Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$ zu sein, da die Gruppen $\mathfrak{t}^{(i)}$, die verschiedenen Gruppen $\mathfrak{T}^{(i)}$ entsprechen, teilweise oder völlig zusammenfallen können. Die notwendige Bedingung der Existenz von Geschlechterklassenkörpern besteht somit darin, daß K verschiedene kritische Primideale enthält und daß die durch Komposition der Trägheitsgruppennormen $\mathfrak{t}^{(i)}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{M}\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ auch durch Komposition von einer echten Teilmenge $\mathfrak{t}^{(k+1)}, \mathfrak{t}^{(k+2)}, \ldots, \mathfrak{t}^{(a)}$ sämtlicher Trägheitsgruppennormen von K erzeugt wird. Die übrigen Trägheitsgruppennormen müssen, mit anderen Worten, überflüssig sein, um die volle Relativgruppe von K über K_m zu bilden.

Es sei K_{h_1} der Körper, der in einem Klassenkörper K' von K zu $\mathfrak{H}_1$ gehört. K_{h_1} kann ebenfalls Geschlechterklassenkörper (und sogar zentraler Klassenkörper) über K sein, da der ihm entsprechende Körper K_n ein anderer sein kann. Die Trägheitsgruppennormen $\mathfrak{T}^{(i)}$ werden nach Satz 8 ungeändert auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}_1$ abgebildet. Diese Abbildungen $\mathfrak{T}^{(i)}\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_1$ sind Teiler der entsprechenden Relativträgheitsgruppennormen $\overline{\mathfrak{T}}^{(i)}\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_1$ in bezug auf den neuen Körper K_n. Ist K_{h_1} zentral über K, so finden wir nach § 6 einen Unterkörper $K_{\overline{h}_1}$, der nicht zentral über K ist, während $\dfrac{K_{h_1}}{K_{\overline{h}_1}}$ einem zentralen Klassenzahlfaktor entspricht. Wir bezeichnen $K_{\overline{h}_1}$ wieder mit K_{h_1}. Dann sind sowohl die $\mathfrak{T}^{(i)}\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_1$ als auch ihr Kompositum $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_1$ zu $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_1$ relativ prim. Wir nehmen an, das Kompositum $\overline{\mathfrak{M}}$ der $\overline{\mathfrak{T}}^{(i)}$habe mit $\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}_1$ einen von 1 verschiedenen Durchschnitt $\overline{\mathfrak{H}}_1/\mathfrak{H}_1$.

Es sei $\overline{\mathfrak{T}}_l = \mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}^{(1)}\overline{\mathfrak{T}}^{(2)} \cdots \overline{\mathfrak{T}}^{(l)}$ die Gruppe, die mit $\overline{\mathfrak{H}}_1$ nur den Durchschnitt $\mathfrak{H}_1$ hat, während $\overline{\mathfrak{T}}_{l+1} = \overline{\mathfrak{T}}_l\overline{\mathfrak{T}}^{(l+1)}$ mit $\overline{\mathfrak{H}}_1$ den Durchschnitt $\mathfrak{H}_2$ hat, der eine echte Obergruppe von $\mathfrak{H}_1$ ist. $\overline{\mathfrak{T}}_l\overline{\mathfrak{T}}^{(l+1)}/\overline{\mathfrak{T}}_l$ enthält also $\overline{\mathfrak{T}}_l\mathfrak{H}_2/\overline{\mathfrak{T}}_l$. Da aber $\overline{\mathfrak{T}}_l \cdot \mathfrak{H}_2/\overline{\mathfrak{T}}_l$ mit $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1$ und $\overline{\mathfrak{T}}_l\overline{\mathfrak{T}}^{(l+1)}/\overline{\mathfrak{T}}_l$ mit einer Faktorgruppe von $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}^{(l+1)}/\mathfrak{M}$ einstufig isomorph ist, so folgt, daß $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1$ mit einem Teiler einer Faktorgruppe von $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}^{(l+1)}/\mathfrak{M}$ einstufig isomorph ist. Ferner betrachten wir $\overline{\mathfrak{T}}_{l+1}\overline{\mathfrak{T}}^{(l+2)}/\overline{\mathfrak{T}}_{l+1}$ und $\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_2$ usw. Hieraus schließen wir wie oben, daß $\overline{\mathfrak{H}}_1/\mathfrak{H}_1$ in Faktorgruppen $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_3/\mathfrak{H}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{H}}_1/\mathfrak{H}_\nu$ zerfällt, von denen jede mit einem Teiler einer Faktorgruppe $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}_l/\mathfrak{M}$ einstufig isomorph ist. Die Gruppe

$\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}_i/\mathfrak{M}$ ist andererseits mit einer Faktorgruppe von $\mathfrak{T}_i\overline{\mathfrak{T}}_i/\mathfrak{T}_i = \overline{\mathfrak{T}}_i/\mathfrak{T}_i$ einstufig isomorph, wo $\mathfrak{T}_i$ die in $\overline{\mathfrak{T}}_i$ aufgehende Relativträgheitsgruppe in bezug auf den ursprünglichen Körper K_n ist.

Durch dieses Verfahren können alle Geschlechterklassenzahlfaktoren erschöpft werden. Da aber alle $\overline{\mathfrak{T}}_i$ mit den $\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{T}}_i/\mathfrak{H}$ einstufig isomorph sind, welche als Trägheitsgruppennormen des Körpers K betrachtet werden können, so folgt der

Satz 15. *Der gesamte Geschlechterklassenzahlfaktor, d. h. das Produkt der Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{H}_1$, die den Geschlechterklassenkörpern eines normalen Körpers K entsprechen, ist ein echter Teiler des Produkts sämtlicher Trägheitsgruppennormen von K. Jede der Gruppen $\mathfrak{H}_1$ läßt sich so in Faktorgruppen $\mathfrak{h}_i$ zerlegen, daß man jeder dieser Faktorgruppen einen Teiler $\mathfrak{t}_i$ einer Faktorgruppe einer Trägheitsgruppennorm zuordnen kann, der mit ihr einstufig isomorph ist. Den verschiedenen $\mathfrak{h}_i$ entsprechen verschiedene $\mathfrak{t}_i$.*

Daraus folgt insbesondere, daß jeder Primfaktor des Geschlechterklassenzahlfaktors in der Gradzahl von K enthalten ist. Die Größe des gesamten Geschlechterklassenzahlfaktors hängt aber auch von der Anzahl der kritischen Primideale von K ab.

Beispiel. Der Körper $K(\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_\nu})$, wo $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ Primzahlen vom Typus $4k+1$ sind, hat $2^{\nu-1}$ zum Geschlechterklassenzahlfaktor. Der entsprechende Teilklassenkörper ist $K(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_\nu})$; die Gruppe $\mathfrak{H}$ ist vom $(\nu-1)$-gliedrigen Typus $\{2, 2, \ldots, 2\}$.

Die Analogie der Klassenzahl mit dem Geschlecht eines Körpers algebraischer Funktionen tritt in diesem Falle besonders klar hervor. Das Geschlecht kann nämlich definiert werden als die halbe Anzahl unabhängiger Wege, die zu einem Punkt der *Riemann*schen Fläche führen, mit anderen Worten, als Überschuß der Anzahl der Windungspunkte über die Anzahl, die nötig ist, um die Monodromiegruppe zu bilden. Im Falle eines hyperelliptischen Körpers $K(z, \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2p})})$ gibt es auch ein Analogon des Klassenkörpers, nämlich den relativ unverzweigten Körper

$$K(z, \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}, \sqrt{(z-a_3)(z-a_4)}, \ldots, \sqrt{(z-a_{2p-1})(z-a_{2p})})$$

vom Relativgrade 2^{p-1}.

Dieser Körper spielt bei dem Umkehrungsproblem eine wichtige Rolle.

Eingegangen 8. Dezember 1928.

Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von *E. Kamke* in Tübingen.

---

1. Vor kurzem habe ich gezeigt [1]), wie die Sätze, die sich auf die Fortsetzbarkeit der Integralkurven der Differentialgleichung [2])

$$y' = f(x, y)$$

bis zum Rande des Richtungsfeldes und auf die Abhängigkeit der Integrale von der Funktion $f(x, y)$ und von den Anfangsbedingungen beziehen, bei bloßer Stetigkeit von $f(x, y)$ und bei einem beliebigen Gebiet als Definitionsbereich lauten. Das a. a. O. benutzte Verfahren für den Nachweis der stetigen Abhängigkeit der Integrale von der rechten Seite der Differentialgleichung und von den Anfangsbedingungen läßt sich nicht unmittelbar für den entsprechenden Nachweis bei Systemen von Differentialgleichungen verwenden. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man auch in diesem Fall zum Ziel kommen kann.

2. Vorangeschickt wird wie a. a. O. der

Satz 1. *In dem $(n+1)$-dimensionalen Gebiet $\mathfrak{G}$ des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes seien die n Funktionen*

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

stetig. Dann kann jede Integralkurve des Differentialgleichungssystems

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

nach beiden Seiten bis an den Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt werden.

Das soll folgendes besagen: Wenn

$$(2) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

in dem offenen Intervall [3]) (a, b) eine Integralkurve des Systems (1) ist, gibt es ein Intervall (A, B), welches das Intervall (a, b) enthält, und mindestens eine in (A, B) existierende Integralkurve

$$y_1 = \Phi_1(x), \ldots, y_n = \Phi_n(x)$$

des Systems (1), so daß beide Integralkurven in dem Intervall (a, b) zusammenfallen und die zweite Integralkurve in jeder der beiden Richtungen der x-Achse dem Rand von $\mathfrak{G}$ beliebig nahe kommt. Dieses letzte soll z. B. für z u nehmendes x bedeuten: Entweder ist $B = +\infty$; oder es ist B endlich, aber mindestens einer der n Limites

$$\overline{\lim_{x \to B-0}} \, |\Phi_\nu(x)| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[1]) Acta mathematica **52** (1928), 327—339.

[2]) Es handelt sich hier stets um Differentialgleichungen *reeller* Funktionen.

[3]) Bei offenen Intervallen wird, falls nichts Gegenteiliges gesagt ist, für die untere und obere Grenze stets $-\infty$ bzw. $+\infty$ zugelassen.

unendlich; oder sowohl B wie alle diese n Limites sind endlich, und es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ beliebig nahe der Ebene $x = B$ Kurvenpunkte, in deren ε-Umgebung ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$ liegt.

Beweis: Der Beweis kann entweder völlig analog erbracht werden wie für den Satz 1 a. a. O. oder, wie ich im wesentlichen einer Mitteilung von Herrn *E. Lindelöf* verdanke, auch in folgender Weise: Es genügt, statt des Satzes 1 die folgende Behauptung (B) zu beweisen:

(B). Es sei $\mathfrak{W}$ irgend eine endliche Menge von abgeschlossenen achsenparallelen Würfeln, die in $\mathfrak{G}$ liegen; dann kann die Integralkurve so fortgesetzt werden, daß sie in beiden Richtungen der x-Achse außerhalb $\mathfrak{W}$ endigt.

Denn zu $\mathfrak{G}$ gibt es eine Folge

$$\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \ldots \tag{3}$$

von Würfelmengen der eben beschriebenen Art, so daß

$$\lim_{m\to\infty} \mathfrak{W}_m = \mathfrak{G}$$

ist, d. h. daß es zu jedem Punkt P von $\mathfrak{G}$ ein M gibt, so daß P in allen $\mathfrak{W}_m$ mit $m > M$ liegt. Man zerlege nämlich jeden Einheitswürfel, dessen Eckpunkte lauter ganzzahlige Koordinaten haben, in $2^{m(n+1)}$ kongruente Würfel und vereinige diejenigen von diesen, die ganz in $\mathfrak{G}$ liegen und deren Punkte außerdem vom Nullpunkt höchstens den Abstand 2^m haben, zu einer Würfelmenge $\mathfrak{W}_m$. Offenbar ist dann für $m_1 < m_2$ stets $\mathfrak{W}_{m_1}$ in $\mathfrak{W}_{m_2}$ enthalten. Ist nun P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G}$, so kann M sicher so groß gewählt werden, daß bei der Teilung der Einheitswürfel in $2^{M(n+1)}$ Teile jeder Teilwürfel, der den Punkt P enthält, nur aus Punkten von $\mathfrak{G}$ besteht und daß zugleich alle Punkte dieser Teilwürfel vom Nullpunkt höchstens den Abstand 2^M haben. Der Punkt P gehört dann der Menge $\mathfrak{W}_M$, also auch allen $\mathfrak{W}_m$ mit $m > M$ an.

Für unsere Folge (3) von Würfelmengen werde nun die gegebene Integralkurve (2) auf Grund der Behauptung (B) so fortgesetzt, daß sie auf beiden Seiten außerhalb $\mathfrak{W}_1$ endigt. Die so erhaltene Kurve wird auf Grund der Behauptung (B) wiederum so fortgesetzt, daß sie auf beiden Seiten außerhalb $\mathfrak{W}_2$ endigt; usw. Durch dieses Verfahren wird in abzählbar unendlich vielen Schritten eine für ein gewisses Intervall $A < x < B$ definierte Integralkurve

$$y_1 = \Phi_1(x), \ldots, y_n = \Phi_n(x) \tag{4}$$

bestimmt. Von dieser läßt sich nun z. B. zeigen, daß sie nach rechts hin dem Rand von $\mathfrak{G}$ in dem oben beschriebenen Sinne beliebig nahe kommt. Dabei darf angenommen werden, daß B endlich ist und alle $\Phi_\nu(x)$ für $\frac{1}{2}(A + B) \leqq x < B$ beschränkt sind. Wenn nun das Kurvenstück für dieses Intervall nicht beliebig nahe an den Rand von $\mathfrak{G}$ herankäme, gäbe es ein beschränktes abgeschlossenes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$, welches das Kurvenstück enthielte und in $\mathfrak{G}$ läge, also auch noch ganz einem $\mathfrak{W}_m$ angehörte, was einen Widerspruch gegen die Konstruktion der Kurve (4) bedeuten würde.

Es ist also in der Tat nur noch die Behauptung (B) zu beweisen, was folgendermaßen geschehen kann. Zu der Würfelmenge $\mathfrak{W}$ gibt es eine endliche Menge $\overline{\mathfrak{W}}$ von achsenparallelen abgeschlossenen Würfeln, so daß $\mathfrak{W}$ total [4]) in $\overline{\mathfrak{W}}$ und $\overline{\mathfrak{W}}$ total in $\mathfrak{G}$ liegt. Es sei ϱ der Abstand der Menge $\mathfrak{W}$ von den Randpunkten von $\overline{\mathfrak{W}}$. Es soll die Fortsetzbarkeit der Integralkurve nach rechts über $\mathfrak{W}$ hinaus bewiesen werden. Dabei darf angenommen werden, daß die Kurve

[4]) Von einer Punktmenge $\mathfrak{p}$ wird gesagt, sie liege total in einer Punktmenge $\mathfrak{P}$, wenn die Punkte von $\mathfrak{p}$ auch Punkte von $\mathfrak{P}$ sind und überdies beide Mengen keinen Randpunkt gemeinsam haben.

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x) \tag{2}$$

für ein gewisses ξ und das Intervall $\xi < x < b$ ganz in $\overline{\mathfrak{W}}$ liegt. Die Funktionen f_ν sind stetig, also in $\overline{\mathfrak{W}}$ beschränkt, etwa

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) < C.$$

Für $\xi < x_1, x_2 < b$ ist dann

$$|\varphi_\nu(x_2) - \varphi_\nu(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f_\nu(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\, dx\right| \leqq C\,|x_2 - x_1|,$$

also existieren die Limites

$$Y_1 = \lim_{x \to b-0} \varphi_1(x), \ldots, Y_n = \lim_{x \to b-0} \varphi_n(x).$$

Wird nun $b = X$ und

$$\varphi_1(X) = Y_1, \ldots, \varphi_n(X) = Y_n$$

gesetzt, so existiert die Integralkurve (2) nunmehr auch noch im Punkte X, und es darf angenommen werden, daß der Punkt $X, Y_1, \ldots, Y_n$ zu $\mathfrak{W}$ gehört, da ja sonst nichts mehr zu beweisen wäre. Wählt man

$$0 < \varepsilon < \frac{\varrho}{\sqrt{n+1}},$$

so liegt daher der achsenparallele Würfel mit dem Mittelpunkt $X, Y_1, \ldots, Y_n$ und der Kantenlänge ε ganz in $\overline{\mathfrak{W}}$. Nach dem Existenzsatz von *Peano* gibt es demnach eine durch den Punkt $X, Y_1, \ldots, Y_n$ gehende Integralkurve, die sicher für $X \leqq x \leqq X + \delta$ existiert, wobei

$$\delta = \operatorname{Min}\left(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{C}\right)$$

ist. Durch dieses Kurvenstück ist somit die ursprüngliche Integralkurve (2) in Richtung der x-Achse um das Stück δ nach rechts fortgesetzt. Mit Hilfe des *Peano*schen Existenzsatzes läßt sich die jetzt erhaltene Integralkurve ev. von neuem um ein Stück δ längs der x-Achse nach rechts fortsetzen, nämlich dann, wenn der Würfel mit der Kantenlänge ε, dessen Mittelpunkt der rechte Kurvenendpunkt ist, noch ganz in $\overline{\mathfrak{W}}$ liegt. Da $\overline{\mathfrak{W}}$ beschränkt ist, und da man bei jedesmaliger Anwendung dieses Verfahrens um das Stück δ nach rechts kommt, kann das Verfahren aber nur endlich oft angewendet werden. Nach endlich vielen Schritten gelangt man also zu einem Punkte $\overline{X}, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$, so daß der ε-Würfel mit diesem Mittelpunkt nicht mehr ganz in $\overline{\mathfrak{W}}$ liegt. Dann liegt der Punkt $\overline{X}, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ aber außerhalb $\mathfrak{W}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Der Satz über die stetige Abhängigkeit der Integralkurve von den rechten Seiten des Differentialgleichungssystems wird zunächst in folgender Form bewiesen:

Satz 2: *Die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

seien für jedes feste μ des Intervalls $\mu_0 \leqq \mu < \mu_0 + M$ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes stetig, und in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ sei gleichmäßig für $\mu \to \mu_0$

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \to f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_0) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Nach dem Existenzsatz von Peano gibt es dann für das Gleichungssystem

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

durch jeden Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ von $\mathfrak{G}$ mindestens eine Integralkurve; eine solche wird irgendwie ausgewählt, irgendwie nach beiden Seiten bis zum Rand von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt und mit

(7) $$y_1 = \varphi_1(x, \mu), \ldots, y_n = \varphi_n(x, \mu)$$

bezeichnet. Für $\mu = \mu_0$ möge durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ nur eine Integralkurve des Systems (6) *vorhanden sein, und es sei $a < x < b$ das genaue Existenzintervall des Funktionensystems $\varphi_\nu(x, \mu_0)$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Ist dann $a < a_1 < b_1 < b$, so existieren alle $\varphi_\nu(x, \mu)$ für alle hinreichend nahe an μ_0 gelegenen μ in dem ganzen Intervall $a_1 \leqq x \leqq b_1$, und für dieses Intervall existieren die folgenden Limites gleichmäßig und haben die Werte*

(8) $$\lim_{\mu \to \mu_0} \varphi_1(x, \mu) = \varphi_1(x, \mu_0), \ldots, \lim_{\mu \to \mu_0} \varphi_n(x, \mu) = \varphi_n(x, \mu_0).$$

Beweis: Um das durch $a_1 \leqq x \leqq b_1$ bestimmte Stück der Integralkurve

(9) $$y_1 = \varphi_1(x, \mu_0), \ldots, y_n = \varphi_n(x, \mu_0)$$

läßt sich ein beschränktes abgeschlossenes Teilgebiet $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ so abgrenzen, daß das Kurvenstück total in $\mathfrak{H}$ liegt. Dieses Gebiet $\mathfrak{H}$ bleibt ebenso wie die Zahlen a_1, b_1 weiterhin fest.

Ist $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ irgend ein Teilintervall von $\langle a_1, b_1 \rangle$, so daß für alle hinreichend nahe an μ_0 gelegenen μ die durch $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ bestimmten Kurvenstücke (7) existieren und in $\mathfrak{H}$ liegen, so gibt es nach der Voraussetzung (5) zu jedem $\sigma > 0$ ein $M_\sigma > 0$, so daß in $\mathfrak{H}$

$$| f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_0) | < \sigma,$$

also

$$| \varphi_\nu'(x, \mu) - f_\nu(x, \varphi_1(x, \mu), \ldots, \varphi_n(x, \mu), \mu_0) | < \sigma$$

für $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_0 + M_\sigma$ und $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ ist. Da für $\mu = \mu_0$ durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ nur eine Integralkurve geht, folgt hieraus [5]), daß die Limites (8) im Intervall $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ gleichmäßig existieren und die angegebenen Werte haben. Der Beweis des Satzes ist demnach erbracht, sobald gezeigt ist, daß die Kurven (7) im Intervall $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ für alle hinreichend nahe an μ_0 gelegenen μ existieren und in $\mathfrak{H}$ liegen.

Sicher trifft dieses für ein gewisses Teilintervall von $\langle a_1, b_1 \rangle$ zu. Denn in $\mathfrak{H}$ sind die Funktionen $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_0)$ beschränkt, etwa

$$| f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_0) | < A \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Ferner gibt es ein $\overline{M}$, so daß in $\mathfrak{H}$

$$| f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_0) | < A$$

für $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_0 + \overline{M}$ ist. Daher ist, so weit die Kurven (7) in $\mathfrak{H}$ liegen, für $\nu = 1, \ldots, n$

(10) $$| \varphi_\nu'(x, \mu) | = | f_\nu(x, \varphi_1(x, \mu), \ldots, \varphi_n(x, \mu), \mu) | < 2A.$$

Da A nicht von μ abhängt und da die Kurven sämtlich durch denselben Anfangspunkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehen, folgt aus dieser Abschätzung, daß die Kurven (7) für $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_0 + \overline{M}$ sämtlich für ein gewisses den Punkt ξ enthaltendes Intervall $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ existieren und in $\mathfrak{H}$ liegen.

Es sei nun $\langle \alpha, \beta \rangle$ das kleinste Teilintervall von $\langle a_1, b_1 \rangle$, das alle abgeschlossenen Intervalle $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ enthält, die erstens den Punkt ξ enthalten und zweitens die Eigenschaft haben, daß für alle hinreichend nahe an μ_0 gelegenen μ die Kurven (7) sämtlich für $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ existieren und in $\mathfrak{H}$ liegen. Es soll zunächst gezeigt werden, daß $\beta = b_1$ ist. Zu dem Zweck wird um den Punkt

$$\beta, \varphi_1(\beta, \mu_0), \ldots, \varphi_n(\beta, \mu_0)$$

ein total in $\mathfrak{H}$ gelegener achsenparalleler Quader

---

[5]) Satz 3 auf S. 9 bei *M. Müller*, Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale [Sitzungsberichte d. Heidelberger Akademie d. Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1927, 9. Abhandlung].

(11) $\quad |x-\beta| \leqq s,\ |y_1-\varphi_1(\beta,\mu_0)| \leqq t, \ldots, |y_n-\varphi_n(\beta,\mu_0)| \leqq t$

so abgegrenzt, daß

$$7As < t \quad \text{und} \quad \beta - s > \xi$$

ist. Dann ist $\langle \xi, \beta - s\rangle$ ein Intervall $\langle \alpha_1, \beta_1\rangle$ von der am Anfang dieses Absatzes beschriebenen Art. Für dieses Intervall trifft daher nach dem zweiten Beweisabsatz der Satz 2 sicher zu. D. h. es gibt insbesondere ein $\mu_0 < \mu_1 < \mu_0 + \overline{M}$, so daß für alle $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_1$

(12) $\quad |\varphi_\nu(\beta - s, \mu) - \varphi_\nu(\beta - s, \mu_0)| < As \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$

ist. Wegen (10) ist, so weit die Kurven in $\mathfrak{H}$ verlaufen,

$$|\varphi_\nu(x, \mu) - \varphi_\nu(\beta - s, \mu)| \leqq 2A\,|x - \beta + s| \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

also insbesondere

(13) $\quad |\varphi_\nu(\beta, \mu_0) - \varphi_\nu(\beta - s, \mu_0)| \leqq 2As \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$

und, so weit die Kurven (7) für das Intervall $|x - \beta| \leqq s$ in $\mathfrak{H}$ liegen,

(14) $\quad |\varphi_\nu(x, \mu) - \varphi_\nu(\beta - s, \mu)| \leqq 4As \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$

Aus (12), (13), (14) ergibt sich nun, so weit die Kurve (7) für $|x - \beta| \leqq s$ in $\mathfrak{H}$ liegt, die Abschätzung

$$|\varphi_\nu(x, \mu) - \varphi_\nu(\beta, \mu_0)| < 7As < t \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

d. h. die Kurve (7) trifft in dem genannten Intervall keine der Ebenen $y_\nu = \varphi_\nu(\beta, \mu_0) \pm t$ des Quaders (11), verläuft somit wegen Satz 1 ganz in $\mathfrak{H}$ für $\xi \leqq x \leqq \beta + s$ und für $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_1$.

Entsprechend beweist man, daß auch in einem Intervall $\alpha - r \leqq x \leqq \xi$ die Kurven (7) für alle hinreichend nahe an μ_0 gelegenen μ existieren und in $\mathfrak{H}$ verlaufen. Daraus folgt erstens, daß diese Existenz auch in $\langle \alpha, \beta\rangle$ selber gesichert ist, und zweitens, daß das Intervall $\langle a_1, b_1)$ in $\langle \alpha, \beta\rangle$ enthalten ist. Damit ist aber der Satz bewiesen.

4. Aus dem Satz 2 folgt nun wieder fast wörtlich wie a. a. O. [1]) — aus diesem Grunde kann hier von der Ausführung des Beweises abgesehen werden — der folgende Satz, der über den Satz 2 hinaus noch eine Aussage über die Abhängigkeit der Integrale von den Anfangswerten enthält:

Satz 3: *Die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mögen die im Satz 2 genannten Bedingungen erfüllen, so daß es wiederum durch jeden Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *des Gebiets* $\mathfrak{G}$ *mindestens eine Integralkurve des Gleichungssystems* (6) *gibt, die in* $\mathfrak{G}$ *von Rand zu Rand läuft und die jetzt mit*

(15) $\quad y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$

bezeichnet werden möge. Für $\mu = \mu_0$ *möge durch den Punkt* $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$ *nur eine Integralkurve des Systems* (6) *vorhanden sein, und es sei* $a < x < b$ *das genaue Existenzintervall des Funktionensystems* (15) *für* $\mu = \mu_0$ *und den Anfangspunkt* $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$. *Ist dann* $a < a_1 < b_1 < b$, *so existieren alle Kurven* (15) *für alle hinreichend nahe an* $\mu_0, \xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$ *gelegenen Wertesysteme* $\mu, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *in dem ganzen Intervall* $a_1 \leqq x \leqq b_1$, *und in diesem Intervall existieren für* $\mu \to \mu_0, \xi \to \xi_0, \eta_1 \to \eta_{10}, \ldots, \eta_n \to \eta_{n0}$ *gleichmäßig die folgenden* $(n + 2)$*-fachen Limites und haben die Werte*

$$\lim \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu) = \varphi_\nu(x, \xi_0, \eta_{10}, \ldots, , \eta_{n0}, \mu_0).$$

Tübingen, 31. 12. 1928.

Eingegangen 2. Januar 1929.

Über den Logarithmus einer Matrix.

Von *Ludwig Schlesinger* in Gießen.

Mit der Definition des Logarithmus einer Matrix, d. h. mit der Frage, eine Matrix zu bestimmen, die in

$$e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots$$

für X eingesetzt eine vorgeschriebene Matrix U ergibt, haben sich zahlreiche Mathematiker bis in die allerjüngste Zeit beschäftigt. Es erscheint wünschenswert, eine Definition zu besitzen, die nicht die Bestimmung der Elementarteiler der gegebenen Matrix U voraussetzt und auch nicht der Einschränkung unterliegt, daß die Reihe

$$(U - I) - \frac{(U-I)^2}{2} + \frac{(U-I)^3}{3} - \cdots$$

konvergiert, d. h. also, daß die latenten Wurzeln von $U - I$ im Einheitskreise liegen. — Zu einer solchen Definition führt die folgende Überlegung.

Es werde die charakteristische Funktion der Matrix U in ihre Linearfaktoren zerlegt

$$Det\,(U - r\,I) = h(r) = (-1)^n (r - r_1)^{\lambda_1} (r - r_2)^{\lambda_2} \cdots (r - r_\varrho)^{\lambda_\varrho},$$

wo $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$ alle voneinander verschieden seien; wir konstruieren dann eine ganze rationale Funktion $g(r)$ von r, für die $r = e^{g(r)}$ in der Form $h(r) \cdot f(r)$ darstellbar ist, wo $f(r)$ eine ganze transzendente Funktion bedeutet. Das geschieht, indem wir zunächst für ein r_k setzen

$$F_k(r) = \log r_k + \sum_{\nu=1}^{\lambda_k - 1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \left(\frac{r - r_k}{r_k}\right)^\nu; \tag{1}$$

dann ist

$$\log r - F_k(r) = (r - r_k)^{\lambda_k} \mathfrak{P}(r - r_k), \tag{2}$$

wo wie auch im folgenden durch $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe angedeutet werden soll. — Trennen wir dann von dem rationalen Bruch F_k/h den auf den Faktor $(r - r_k)^{\lambda_k}$ des Nenners bezüglichen Teil ab, setzen also

$$\frac{F_k(r)}{h(r)} = \frac{A_k(r)}{(r - r_k)^{\lambda_k}} + \frac{B_k(r)}{h(r)} (r - r_k)^{\lambda_k}, \tag{3}$$

wo A_k und B_k ganze rationale Funktionen von r bedeuten, so folgt aus (2) und (3), daß

$$\log r - \frac{A_k(r)\, h(r)}{(r - r_k)^{\lambda_k}} = (r - r_k)^{\lambda_k}\, \mathfrak{P}(r - r_k)$$

ist, also wenn wir

$$g(r) = \sum_{k=1}^{\varrho} \frac{A_k(r)\, h(r)}{(r - r_k)^{\lambda_k}}$$

setzen, so gilt in der Umgebung eines jeden r_ν die Darstellung

$$\log r - g(r) = (r - r_\nu)^{\lambda_\nu} \mathfrak{P}(r - r_\nu),$$

also, indem wir von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen,

$$r = e^{g(r) + (r - r_\nu)^{\lambda_\nu} \mathfrak{P}(r - r_\nu)}$$

und demnach

$$r - e^{g(r)} = (r - r_\nu)^{\lambda_\nu} \mathfrak{P}(r - r_\nu).$$

Es ist also der Quotient $(r - e^{g(r)})/h(r)$ allenthalben holomorph, somit eine ganze transzendente Funktion $f(r)$, wie verlangt wurde. — Nun ist die identische Gleichung

$$r - e^{g(r)} = h(r) \cdot f(r)$$

sicher richtig, wenn man darin für r irgend eine Matrix einsetzt; setzen wir also für r die Matrix U, so ist zufolge des *Cayley*schen Satzes $h(U)$ gleich Null, wir erhalten also

$$U - e^{g(U)} = 0$$

d. h. $g(U)$ hat die für $\log U$ zu fordernde Eigenschaft. — Dabei ist nur vorausgesetzt, daß die latenten Wurzeln von U von Null verschieden sind, weil sonst die Darstellung (2) unmöglich wäre. In dem in der Gleichung (1) auftretenden $\log r_k$ ist auch die Mehrdeutigkeit von $\log U$ in Evidenz gesetzt. — Diese Werte $\log r_k$ sind die Wurzeln der zu der Matrix $\log U$ gehörigen charakteristischen Gleichung. —

Wir bemerken noch, daß dieselbe Methode auch anwendbar bleibt, wenn man an Stelle von e^x irgend eine ganze rationale oder transzendente Funktion einer Matrix umkehren will. Ist $E(x)$ eine ganze transzendente Funktion und bezeichnet man mit $x_1, x_2, \ldots$ die Nullstellen der Derivierten $E'(x)$, mit u_0 den *Picard*schen Ausnahmewert von $E(x)$, sofern diese Werte vorhanden sind, und mit $L(u)$ die inverse Funktion von $u = E(x)$, so muß man für die Matrix U nur voraussetzen, daß ihre latenten Wurzeln von den Werten $u_0, E(x_1), E(x_2), \ldots$ verschieden sind. — Dann ist die Funktion $L(u)$ in der Umgebung eines jeden, von diesen Werten verschiedenen u-Wertes holomorph, man kann also nach dem für die Exponentialfunktion angewandten Verfahren eine ganze rationale Funktion $g(r)$ so angeben, daß $r - E(g(r)) = h(r) \cdot f(r)$ wird, wo $f(r)$ eine ganze transzendente Funktion bedeutet, und hat dann $g(U) = L(U)$. — Für den Fall, wo $E(x)$ gleich x^2 oder x^m ist, d. h. wo man die Wurzel aus einer Matrix definieren will, ist dieses Verfahren längst bekannt und in die Lehrbücher übergegangen. — Es bleibt cum grano salis auch anwendbar, wenn es sich statt um eine Matrix um ein Funktionen- oder Konstanten*feld* $U(i, k)$ handelt, d. h. um eine etwa innerhalb des Einheitsquadrats der (i, k)-Ebene definierte stetige Funktion U, die noch von einem Parameter abhängen kann. — Der Logarithmus eines solchen Feldes spielt in der Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen eine ähnliche wichtige Rolle, wie der Logarithmus einer Matrix in der Theorie der linearen Differentialsysteme, wofür man meine [1]) und *Hilbs* [2]) Noten vergleichen mag. —

---

[1]) *L. Schlesinger*, Jahresbericht der D. M.-V. **XXIV** (1915), S. 84—123, besonders S. 115, 116.

[2]) *E. Hilb*, Mathematische Annalen **77** (1916), S. 514—535, insbesondere S. 519, 520.

Eingegangen 15. Juli 1929.